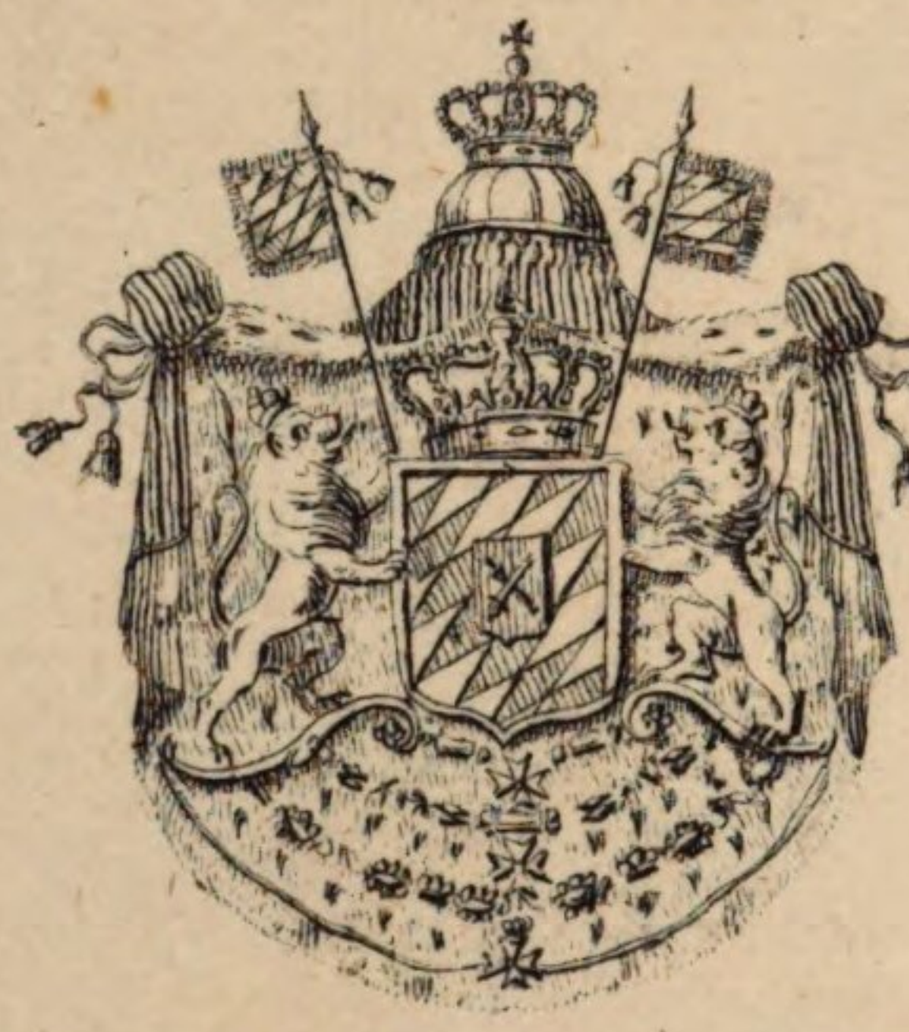
Math. Un.
116-1



BIBLIOTHECA REGIA MONACENSIS.

Ex donat. Lacidi

<366364769600 12

<366364769600 12

Bayer. Staatsbibliothek

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS.

Lehrbuch

der

Arithmetik

zum Gebrauche

öffentlicher Vorlesungen

auf der

churfürstl. baierischen Landes-Universität

in Landshut,

verfaßt vom

Maurus Magold,

Benedictiner von Tegernsee, churfürstl. geistl. Rathe und öffentl. ordentl. Professor der Mathematik allda.

Mit 9 Tabellen.

Mit Censurfreyheit der churfürstl. Landes-Universität.

Landshut

bey Anton Weber.

1802.

Vorrede.

Bey Verfassung dieses Lehrbuches hatte ich nicht nur den Zweck, dem Anfänger in der Mathematik die ersten Kenntnisse davon beyzubringen, sondern auch und zwar vorzüglich den angehenden Akademiker durch das Studium dieser Wissenschaft an's gründliche Denken zu gewöhnen, und ihn dadurch für das Studium der übrigen Wissenschaften vorzubereiten.

Beym ersten Cursus würde ich rathen, so wie ich es zum Theile in meinen öffentlichen Vorlesungen selbst thue, den sechsten und siebenten Abschnitt des dritten Hauptstückes, den vierten, fünften und sechsten Abschnitt des vierten Hauptstückes, den dritten Abschnitt des sechsten Hauptstückes, und endlich das ganze achte Hauptstück zu überschlagen. Ich

nahm

nahm diese Lehren ins Lehrbuch auf, weil ich jenen, die mehr Mathematik zu lernen verlangen, gerne die Hand biethen, und die Fortsetzung ihres Studiums erleichtern wollte; und ich wies diesen Lehren jenen Platz an, der ihnen ihres Inhaltes nach zukömt, und für den Studierenden beym zweyten Nachhohlen vortheilhaft ist, indem er nun die Lehren in ihrem Zusammenhange einsehen lernt.

Die Entfernung des Druckortes, wodurch zur Zeit und Kostenersparniß nur eine Revision von mir vorgenommen werden konnte, ist der Grund, daß mehrere Druckfehler sich einschlichen, als außer dem geschehen seyn würde.

Mit Ehrfurcht nenne ich jene Männer, durch deren schätzbare Bücher ich mich gebildet, und die ich bey diesem Lehrbuche benutzet habe, nemlich Carnot, Euler, Kästner, Karsten, Lorenz, Maaß, Schulz und Vega.

Landshut den 17. April 1802.

Magold.

Inhalt.

Inhalt.

Seite

Einleitung in die gesammte Mathematik. . . 1

I. Vom Gegenstande der Mathematik, und ihren verschiedenen Theilen. 1

II. Von der mathematischen Methode. . . . 7

III. Vom Nutzen der Mathematik. 11

IV. Von den Zeichen und Grundsätzen der Mathematik. 12

Arithmetik.

I. Hauptstück von ganzen Zahlen und Größen. 14

I. Abschnitt von verschiedenen Zahlensystemen, und ihrer Bezeichnungsart. 14

Seite

II. Abschnitt von der Addition und Subtraction ganzer Zahlen und Größen. 22

III. Abschnitt von der Multiplication und Division ganzer Zahlen und Größen. 36

IV. Abschnitt von der Theilbarkeit ganzer Zahlen. 58

II. Hauptstück von gebrochenen Zahlen . . 69

I. Abschnitt von der Beschaffenheit der Brüche überhaupt und ihrer Bezeichnungsart. . . 69

II. Abschnitt von den vier Rechnungsarten mit Brüchen überhaupt. 77

III. Abschnitt von Decimalbrüchen insbesondere 83

III. Hauptstück von Potenzen und Wurzeln der Zahlen. 90

I. Abschnitt von der Erzeugung der Potenzen, und Ausziehung der Wurzeln aus einfachen Größen. 90

II. Abschnitt Rechnungsarten mit Potenzen. . 99

III. Abschnitt Rechnungsarten mit Wurzelgrößen. 110

IV.

Seite

IV. Abschnitt von dem Quadrate, und der Quadratwurzel vieltheiliger Größen. 116

V. Abschnitt vom Cubus, und der Cubikwurzel vieltheiliger Größen. 132

VI. Abschnitt vom binomischen Lehrsatze. . 149

VII. Abschnitt von den Permutationen und Combinationen. 166

IV. Hauptstück von Gleichungen. 178

I. Abschnitt von Gleichungen überhaupt. . 178

II. Abschnitt von einfachen Gleichungen. . . 183

III. Abschnitt von quadratischen Gleichungen. 190

IV. Abschnitt von der Natur und Reduction der höhern Gleichungen überhaupt. . . . 195

V. Abschnitt von der Auflösung höherer Gleichungen. 212

VI. Abschnitt von Functionen. 224

V. Hauptstück von Verhältnissen. 241

I. Abschnitt von Verhältnissen überhaupt. . 241

Seite

II. Abschnitt von arithmetischen Proportionen, und Progressionen der Zahlen. 249

III. Abschnitt von geometrischen Proportionen der Zahlen. 262

IV. Abschnitt von geometrischen Progressionen. 276

VI. Hauptstück von den Logarithmen. . . . 291

I. Abschnitt von Logarithmen überhaupt. . 291

II. Abschnitt von briggischen Logarithmen. . 295

III. Abschnitt. Berechnung der Logarithmen durch Auflösung der Functionen in Reihen. 301

IV. Abschnitt vom Gebrauche der am Ende beygefügten kleinern logarithmischen Tabellen. 314

V. Abschnitt. Anwendung der Logarithmen auf die Rechnungen mit Ziffern. 322

VII. Hauptstück. Practische Rechenkunst. . . 329

I. Abschnitt. Anwendung der vier Rechnungsarten. 329

II. Abschnitt. Anwendung der Proportionslehre. 335

Seite

III. Abschnitt. Anwendung der Progressionslehre. 353

VIII. Hauptstück von der Infinitesimalrechnung. 377

I. Abschnitt vom Begriffe, und den Grundsätzen der Infinitesimalrechnung. 377

II. Abschnitt. Differentialrechnung. . . . 389

III. Abschnitt. Anwendung der Differentialrechnung auf die Bestimmung des größten und kleinsten Werthes einer Function. . . 408

IV. Abschnitt. Integralrechnung. . . . 418

Anhang von den in verschiedenen Ländern, vorzüglich in Baiern üblichen Maaße, Gewichte, und Münzen. 449

I. Abtheilung. Vom Maaße. . . . 449

I. Vom Längenmaaße. 449

II. Vom Flächenmaaße. 457

III. Vom Körpermaaße. 459

Seite

II. Abtheilung. Vom Gewichte. . . 470

. . . . . .

III. Abtheilung. Von Münzen. . . 478

Tabelle der gemeinen, oder briggischen Logarithmen der natürlichen Zahlen von 1 bis 1000. 486

Einleitung
in die
gesammte Mathematik.

I.
Vom Gegenstande der Mathematik, und ihren verschiedenen Theilen.

§. 1.

Erklärungen:

a. Dinge heißen **einerley** (entia eadem) wenn in dem einen alles, wie in dem andern ist, **verschieden** (diversa) wenn in dem einen etwas ist, was in dem andern nicht ist.

b. **Gleichartig** (homogenea) **nennt man Dinge, in wieferne man nur auf jenes sieht, was sie miteinander gemein haben, ungleichartig** (heterogenea) **in wie fern man auf das sieht, was in ihnen verschieden ist. z. B. Ein Baier und ein Schwab sind als Teutsche gleichartig, hingegen in wieferne der eine ein Baier, der andere ein Schwab ist, ungleichartig.**

c. **Ein Ding, in wiefern es ein gleichartiges Mannigfaltiges, oder Quantität hat, heißt eine Größe** (Quantum).

d. **Wird die Größe eines Dinges B durch ein ihm gleichartiges Ding A bestimmt, das ist, angegeben, wie oft A genommen werden muß, um B zu erzeugen, so heißt A das Maaß oder die Einheit, dieses Bestimmen selbst ein Messen oder Zählen, und die bestimmte Quantität eine Zahl oder die relative Größe von B, so wie B selbst eine gezählte Größe. Zahl und gezählte Größe unterscheiden sich also wie Subjekt und Prädikat, man nennt wohl auch gezählte Größen selbst Zahlen.**

e. **Dinge von einerley Quantität heissen gleich** (aequalia), **von einerley Qualität ähnlich** (similia) **von einerley Quantität und Qualität congruent** (Congruentia).

f. **Eine Größe heißt stetig, fließend,** (quantum continuum), **wenn das Gleichartige in ihr so zusammenhängt, daß das Aufhören des einen zugleich der Anfang des andern ist. Z. B. die Zeit, wo das**

Ende

Ende der vergangenen zugleich der Anfang der zukünftigen ist. Dißcret (quantum discretum) nennt man eine Größe, wenn das Mannigfaltige abgesondert ist, z. B. ein Haufen Weizenkörner.

§. 2.

Erklärung:

Mathematik (μαθημα μαθησις, disciplina, scientia) ist die Wissenschaft der Größen (Scientia quantorum.)

Anmerk. Den Namen Wissenschaft ohne Beysatz erhielt sie bey den Griechen vermuthlich ihres Alters, und der Evidenz ihrer Lehren wegen.

§. 3.

Theile der Mathematik sind:

a. Die **Arithmetik** oder **Zahlenlehre** (ἀριθμὸς numerus), die Wissenschaft der Zahlen, und gezählter Größen. Da dißcrete Größen, als Aggregate Zahlen sind, und stetige Größen, ebenfalls gezählt werden können, so heißt sie auch **allgemeine Größenlehre** (Mathesis universalis.)

b. Die **Geometrie** (γεωμετρια terrae mensura) die Wissenschaft von stetigen ausgedehnten Größen.

c. Die **Trigonometrie** (τριγωνος μετρον trianguli mensura) die Wissenschaft aus dreyen gegebenen Stücken eines Dreyeckes, die übrigen drey

durch Rechnung zu finden; sie entsteht aus der Verbindung der Geometrie und Arithmetik.

§. 4.

Die Mathematik heißt:

a rein (Mathesis pura) wenn man von allen wirklichen Gegenständen abstrahirt,

b gemischt, oder angewandt (Mathesis adplicata) wenn die Lehren der reinen Mathematik auf wirkliche Gegenstände bezogen werden.

§. 5.

Mathematik wird endlich in Rücksicht ihrer Lehren sowohl als der beym Vortrage gebrauchten Methode eingetheilt.

A in die Elementarmathematik, deren Methode synthetisch ist, und die sich bey ihren Lehren auf die ersten Anfangsgründe einschränkt, und zwar

a in der Elementararithmetik, wo aber die Gränzen noch schwankend sind, auf die leichtern Verknüpfungen ganzer und gebrochener Zahlen, der Potenzen vom zweyten und dritten Grade.

b in der Elementargeometrie auf die gerade und Kreislinie, und solche Flächen und Körper, die sich durch diese Linien darstellen lassen.

B in die höhere Mathematik (Mathesis sublimior) deren Methode analytisch ist, und die man auch deßwegen die Analys nennt. Sie fährt bey ihren Lehren

ren da fort, wo es die Elementarmathematik ließ, und entwickelt die schwereren Aufgaben und Lehrsätze.

a zur höhern Arithmetik gehören die Algebra, die Differenzial- und Integralrechnung.

b die höhere Geometrie dehnt sich in ihren Untersuchungen auf alle krumme Linien, Flächen, und Körper aus, die sich nicht durch gerade, oder Kreislinien darstellen lassen.

§. 6.

Zur angewandten Mathematik gehören

A die praktische Rechenkunst, die Anwendung der Arithmetik auf die gewöhnlichen Rechnungsfälle im bürgerlichen Leben;

B die praktische Geometrie, die Anwendung der Geometrie und Trigonometrie auf die Bestimmung der Längen, Höhen, Flächen

a auf der Oberfläche der Erde, die Landmeßkunst (geodaesia)

b unter der Oberfläche der Erde, die Markscheidekunst, (geometria subterranea).

Anmerk. Diese Wissenschaften werden gewöhnlich den Lehren der reinen Mathematik entweder eingeschaltet, oder am Ende beygefügt.

§. 7.

Unter angewandter Mathematik ohne Beysatz versteht man dermal

A die

A die mechanischen Wissenschaften, vom Gleichgewichte, und der Bewegung, und zwar

a schwerer fester Körper, die Statik und Mechanik,

b schwerer flüssiger Körper, die Hydrostatik, und Hydraulik,

c der Luft, als eines schweren, flüssigen, und elastischen Körpers, die Aerometrie,

B die optischen Wissenschaften vom Lichte.

a die Optik, vom Lichte, das vom Gegenstande in gerader Linie allenthalben sich verbreitet

b die Perspectiv, von der Zeichnung eines Gegenstandes auf einer Ebene, die zwischen ihm und dem Auge in einer bestimmten Lage gesetzt ist,

c die Katoptcik vom zurückgeworfenen Lichte,

d die Dioptrik vom gebrochenen Lichte.

C die astronomischen Wissenschaften, von den Körpern des Weltgebäudes, und dem dadurch bestimmten Raum und Zeitmaaße auf unserer Erde.

a die Astronomie, von der Größe, Bewegung, und Verbindung der Weltkörper;

b die Geographie von der Figur, Größe der Erde, und der Lage der Oerter auf ihrer Oberfläche durch Astronomie bestimmt;

c die Chronologie oder astronomische Zeitbestimmung,

d die Gnomonik vom Zeitmaaße vermittels des Schattens.

D die architectonischen Wissenschaften, als

a die Baukunst,
b die Artillerie,
c die Fortification.

Anmerk. Die architectonischen Wissenschaften, ob sie gleich mathematische Kenntnisse voraussetzen, fodern auser diesen noch ganz andere Kenntnisse, und müssen daher aus eigenen Lehrbüchern vollständig erlernet werden; in den mathematischen Lehrbüchern werden sie meist nur sehr kurz am Ende berührt, oder gar weggelassen.

II.

Von der mathematischen Methode.

§. 8.

Die Titel, nach welchen in der Mathematik, so wie in jeder strengen Wissenschaft die Lehren vorgetragen werden, sind:

a Erklärungen,
b Sätze,
c Beweise,
d Anmerkungen.

§. 9.

Eine Erklärung (Definitio) heißt eine deutliche, und präcise Darstellung des vollständigen Begriffes einer Sache. Sie heißt a ge-

a genetisch, oder Sacherklärung (Definitio realis, genetica) wenn sie die Art angiebt, wie die Sache entstehen kann, oder was einerley ist, wenn sie die Möglichkeit der Sache darthut;

b Worterklärung (Definitio nominalis) wenn durch sie die Möglichkeit der Sache nicht bestimmt ist.

§. 10.

Ein Satz, der angiebt, daß etwas so, oder nicht so sey, heißt ein theoretischer Satz (Propositio theoretica), und zwar

a ein Grundsatz (Axioma), dessen Wahrheit schon einleuchtet, sobald man den Sinn desselben gefaßt hat;

b ein Lehrsatz (Theorema), dessen Wahrheit aus andern bekannten Wahrheiten abgeleitet werden muß, oder der eines Beweises bedarf.

§. 11.

Ein Satz, der etwas zu bewerkstelligen verlangt, oder angiebt, daß etwas geschehen kann, oder soll, heißt ein praktischer Satz (Propositio practica), und zwar

a eine Foderung, ein Heischesatz (Postulatum), wenn die Möglichkeit ihm genüge zu leisten unmittelbar einleuchtet, so bald man nur versteht, was gefodert wird;

b eine Aufgabe (Problema), wenn

α die Art der Verrichtung erst bestimmt, welches man die Auflösung (Solutio) nennt, und

β die Richtigkeit der Auflösung dargethan werden muß, das ist, die Auflösung eines Beweises bedarf.

§. 12.

Man unterscheidet endlich noch

a Zusätze (corollaria), Sätze, die aus andern unmittelbar, oder durch einen leichten Schluß folgen,

b Lehrsätze (Lemmata), Sätze aus dem Gebiethe anderer Wissenschaften z. B. in der angewandten Mathematik Sätze aus der Naturlehre;

c Anmerkungen (Scholia) was zur Erläuterung, Anwendung u. s. f. des vorhergehenden beygesetzt wird, mithin keinen Bestandtheil des Ganzen im strengen Sinne ausmacht.

§. 13.

Ein Beweis (Demonstratio), die Darstellung der Wahrheit eines Satzes aus andern schon bekannten unbezweifelten Wahrheiten, heißt

a direct, wenn er die Richtigkeit des Satzes geradezu zeigt,

b indirect, apogogisch, wenn er die Unmöglichkeit des Gegentheils darthut.

§. 14.

§. 14.

In Rücksicht der Ordnung, nach welcher die Sätze in einem Beweise aufeinander folgen, ist ein Beweis

a synthetisch, wenn er von Gründen ausgeht, und zur Conclusion fortführt,

b analytisch, wenn er von der Conclusion ausgeht, und zu den Gründen zurückführt.

§. 15.

Die mathematische Methode ist scientivisch, und als solche jeder Wissenschaft gemeinschaftlich; aber die Mathematik hat noch überdieß den auszeichnenden Vorzug, daß sie ihre Begriffe **construiren**, das ist, die **Gegenstände derselben in ihrer Allgemeinheit anschaulich darstellen**, folglich die Bestimmungen davon im strengen Sinne **demonstriren** kann, während der Philosoph in seinem allgemeinen Satze, der sich wohl durch einzelne anschauliche Beyspiele erläutern, aber nicht beweisen läßt, die einzelnen Wahrheiten als enthalten vorstellt und aus selben ableitet; die philosophische Methode ist nemlich **discursiv**, jene der Mathematik hingegen **intuitiv**, daher die Evidenz der letztern, die nur ihr eigenthümlich, und für alle andere Wissenschaften unerreichbar ist.

Anmerk. Im Verfolge läßt sich der Unterschied zwischen der philosophischen und mathematischen Methode durch öftere Vergleichung ihrer Beweisarten dem Anfänger erst vollkommen verständlich machen.

III.

Vom Nutzen der Mathematik.

Die §. 6. und 7. angeführten Theile der angewandten Mathematik beweisen den entschiedenen Einfluß ihrer Lehren auf die Befriedigung der dringendsten Bedürfnisse durch alle Zweige der menschlichen Gesellschaft; mit Rechte also genoß sie bisher immer die Achtung aller gesitteter Nationen, und jede Verbreitung derselben ist Beförderung des allgemeinen Menschenglückes.

§. 17.

Auser diesen Vortheilen ist das sorgfältige Studium der Mathematik schon für sich jedem angehenden Philosophen sehr zu empfehlen; denn

a dadurch gelangt er in den Besitz einer Menge Wahrheiten, und Wahrheit muß doch dem Freunde der Weisheit schon für sich unschätzbar seyn;

b die Evidenz ihrer Lehren gewährt bey ihrem Anblicke das reinste Vergnügen;

c Mathematik ist ausübende Logik, und als solche weckt und pflegt sie den philosophischen Forschungsgeist, übt und gewöhnt ans gründliche Denken, erzeugt also jene Geistesstimmung, die man beym Eintritte zu allen übrigen Wissenschaften mitbringen muß.

IV.

Von den Zeichen, und Grundsätzen der Mathematik.

§. 18.

1. Das Zeichen der Gleichheit ist (=); A = B will sagen, A sey eben so groß als B.

2. Die Ungleichheit drückt das Zeichen (<) dergestalt aus, daß die Spitze auf die kleinere Größe, und die Oeffnung auf die größere hinweiset.

A < B heißt; A ist kleiner als B, und B ist größer als A.

3. Das Zeichen (∽) drückt die Aehnlichkeit aus. Z. B. A ∽ B liest man, A ist der Größe B ähnlich.

4. Zur Bezeichnung der Congruenz dient (≅); oder A ≅ B will sagen: die Größen A und B sind einander ähnlich und gleich, d. i. congruent.

5. Das Unendlichgroße wird durch (∞), und das Unendlichkleine durch ($\frac{1}{\infty}$) bezeichnet.

§. 19.

Grundsätze der ganzen Mathematik:

1. Jede Größe ist sich selbst gleich, oder A = A.

2. Das Ganze ist seinen Theilen zusammen genommen gleich.

3. Das

3. Das Ganze ist größer, als ein oder einige Theile desselben.

4. Zwey Größen, die einer dritten gleich, sind auch unter sich gleich, d. i. wenn $A = B$; $A = C$, so ist auch $B = C$.

5. Was größer als eine von zweyen gleichen Größen, das ist auch größer, als die andere. Z. B. wenn $A > B$, $B = C$, so ist $A > C$.

6. Was kleiner als eine von zweyen gleichen Größen, ist auch kleiner, als die andere, d. i.: wenn $A < B$, $B = C$; so ist $A < C$.

7. Was größer als die größere von zweyen ungleichen Größen, das ist auch größer, als die kleinere, oder wenn $A > B$, $B > C$; so ist $A > C$.

8. Was kleiner, als die kleinere von zweyen ungleichen Größen, das ist auch kleiner, als die größere. Wenn $A < B$; $B < C$; so ist $A < C$.

9. Gleiches auf gleiche Art verändert, giebt wieder Gleiches; hingegen Gleiches auf ungleiche Art, oder Ungleiches auf gleiche Art verändert, giebt Ungleiches.

10. Congruente Dinge sind vollkommen einerley, und lassen sich daher füreinander substituiren.

11. Gleiche Größen lassen sich füreinander in Rücksicht ihrer Gleichheit, so wie ähnliche in Rücksicht ihrer Aehnlichkeit füreinander setzen.

Arithmetik.

I Hauptstück.

Von ganzen Zahlen und Größen.

I Abschnitt.

Von verschiedenen Zahlensystemen, und ihrer Bezeichnungsart.

§. 20.

Erklärungen:

a Wenn die Einheit A (§. 1. d.) der Größe B selbst wieder aus einer andern C etlichmal genommen erzeugt ist, so heißt sie **relative Einheit** von B, und in Rücksicht C eine **Einheit höherer Art**, so wie C die **niedere Einheit**.

b Wenn aber A aus keiner andern Einheit C erzeugt ist, mithin als Inbegriff minderer Einheiten betrachtet werden kann, so heißt sie **absolute** oder **primitive Einheit**.

§. 21.

§. 21.

Erklärung:

a Eine Größe B, in wieferne sie als Inbegriff mehrerer Einheiten A betrachtet wird, also ein Ganzes ist, heißt eine **ganze Zahl;**

b In wieferne sie aber selbst nur einen oder mehrere Theile einer andern D, mithin nicht das Ganze davon enthält, eine **gebrochene Zahl.**

Zusatz.

Relative Einheiten sind in Rücksicht der niedern Einheiten ganze Zahlen, in Rücksicht der höhern Einheiten gebrochene Zahlen.

§. 22.

Erklärung:

Wenn man immer eine bestimmte Anzahl von Einheiten zusammen nimmt, und aus ihrem Inbegriffe eine Einheit höherer Ordnung bildet, so heißt die nach einer bestimmten Regel festgesetzte Subordination der Zahlen, eine Zahlkensystem, und zwar

a Decimalsystem, Dekadik, wenn immer zehen Einheiten einer Art zusammengenommen eine höhere Einheit, und wieder zehen von letztern eine Einheit von noch höherer Art bilden.

b Duodecimalsystem, Dodekadik, wenn eine Einheit höherer Art immer aus zwölf Einheiten der nächst mindern Art besteht.

Anmerk.

Anmerk. Daß sich auf ähnliche Art mehrere andere Systeme als Dyadik u. s. w. denken lassen, leuchtet für sich ein.

§. 23.

Erklärung:

Im Decimalsysteme, welches fast bey allen Nationen von jeher üblich war, und wegen der Anzahl der Finger an beyden Händen das anschaulichste, also natürlichste ist, nimmt man zehen Einer für eine Einheit der zweyten Ordnung, und nennt sie einen Zehner, zehen Einheiten der zweyten Ordnung geben eine Einheit der dritten Ordnung, die Hundert heißt, zehen Hunderte machen Tausend, das ist Einer von Tausenden; aus ihnen entstehen wieder Zehner, und Hunderte von Tausend; Tausendmal Tausend oder zehen von Hundert Tausenden geben eine Million; nun nimmt man aufs neue Einer, Zehner, Hunderte u. s. w. von Millionen; auf die nemliche Art entstehen Billionen, Trillionen u. s. f.

§. 24.

Erklärung:

Im Decimalsysteme drückt man

a die Anzahl der Einheiten jeder Ordnung durch nachstehende Zeichen aus, die man arabische Ziffern nennt: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0. Erstere neun Zeichen sind Zahlziffern, letzteres zeigt den Mangel einer Zahl an, und heißt daher Null

oder **Nichts.** Diese Anzahl der Einheiten, welche die Ziffern für sich genommen darstellen, macht ihren **natürlichen Werth** aus; so ist **vier** der natürliche Werth vom Ziffer 4.

b die **Ordnung** der Einheiten bezeichnet man durch die Ordnung der Stellen, die man von der rechten zur linken Seite den Ziffern giebt, und in diesem besteht ihr **Localwerth.** Z. B. 324 bezeichnet 4 Einer, 2 Zehner, 3 Hunderter.

I **Anmerk.** Die Griechen und Römer, ob sie gleich nach dem Decimalsystem rechneten, bedienten sich, und zwar erstere des ganzen Alphabetes, letztere einiger Buchstaben desselben zur Bezeichnung der Zahlen; aber allemal mußte die Art damit zu rechnen sehr beschwerlich seyn.

II **Anmerk.** Wollte man im Decimalsystem nur mit zwey Ziffern z. B. 1, 0 die Zahlen ausdrücken, so lassen sich die erste zehen Zahlen auf folgende Art darstellen.

Eins	= 1	Sechs	= 110
Zwey	= 10	Sieben	= 111
Drey	= 11	Acht	= 1000
Vier	= 100	Neun	= 1001
Fünf	= 101	Zehen	= 1010 u. s. f.

Man sieht aber sogleich, daß hier eine größere Zahl nicht leicht auf einmal überschauet werden kann, mithin daß diese Bezeichnungsart der gewöhnlichen weit nachstehe.

III Anmerk. Wollte man aber nach dem Duodecimalsystem rechnen, und sich dabey der gewöhnlichen Ziffern bedienen, so muß man für die Zahl Zehn und Eilf eigene Zeichen haben z. B. nach Herrn Horstig für Zehen (↊) einen umgekehrten Siebner, und für Eilf (Ɛ) einen umgekehrten Dreyer. Die ersten zwölf Zahlen lassen sich auf folgende Art der Ordnung nach ausdrücken:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, ↊, Ɛ, 10.

Wo wieder (o) Null, oder Nichts ist. Ferner könnte man die Einer der zweyten Ordnung Duzent, jene der dritten Zwölfer, die der vierten Dodekaden nennen, mithin würde 3 7 ↊ Ɛ gelesen werden: drey Dödekaden, sieben Zwölfer, zehen Duzent, Eilf. Da die Zahl zwölf durch 2, 3, 4, 6; hingegen die Zahl zehen nur durch 2, 5 theilbar ist, und da ferner im bürgerlichen Leben in vielen Fällen das Duodecimal, oder Sexagesima lmaaß gebraucht wird, so ist unläugbar, daß die Rechnung nach dem Duodecimalsysteme viele Vortheile gewähre: hingegen vermißt man am selben das Natürliche und Anschauliche des Decimalsystemes, und kann doch dabey, sobald andere Maaße vorkommen, verschiedener Reductionen nicht entbehren.

§. 25.

Aufgabe:

Eine durch Ziffern ausgedrückte Zahl auszusprechen, oder zu lesen. Z. B.

2 4 5 6 8 7 4 0 0 0 3 2 5 2 0 1 0 2 0 3

Auf-

Auflösung:

1. Man theile die gegebene Zahl von der Rechten zur Linken in Klassen von 6 Ziffern.

2. Am Ende der ersten setze man oben das Zeichen (') welches Million ausdrückt, am Ende der zweyten (") die Billion, am Ende der dritten (''') oder Trillion u. s. f.

3. Jede Klasse theile man in drey Ziffern durch das Zeichen (,) welches alles mit Tausend gelesen wird, d. i.

2 4''' 5 6 8, 7 4 0'' 0 0 3, 2 5 2' 0 1 0, 2 0 3

4. Nun lese man allemal auf einmal die zwischen ein paar Zeichen eingeschlossenen Ziffer (immer drey, ausser in der höchsten Klasse, wo manchmal nur zwey oder eines da ist) mit dem am Ende stehenden Zeichen; das ist:

5. Vier und Zwanzig Trillionen, 568 Tausend, 740 Billionen, 3 Tausend, 252 Millionen, 10 Tausend, 203.

6. Da sich die Zeichen von Billionen, Millionen u. s. f. allemal auf alle 6 Ziffern einer Klasse erstrecken, so müssen sie gelesen werden, wenn auch nur ein Zahlziffer in dieser Klasse vorkömt. Z. B.

2, 0 0 0''' 3 2 4, 0 0 0'' 0 0 0, 2 0 0' 0 0 0, 0 0 0

muß gelesen werden: 2 Trillionen, 324 Tausend Billionen, 2200 Millionen.

Der Beweis liegt unmittelbar in §. 23. u. 24.

§. 26.

Aufgabe:

Eine gegebene Zahl in Ziffern ausdrücken: z. B. Vier und sechzig Tausend dreyhundert vier und zwanzig Billionen, zweyhundert sechs und dreyßig Millionen, vier und zwanzig.

1. Man bedenke, daß nach §. 23. u. 24. zu jeder Hauptklasse, das ist zu Millionen, Billionen u. s. f. (die höchste ausgenommen) allemal 6 Ziffern erfodert werden, ferner daß

2. Jede Klasse in zwey Theile getheilet in den höhern drey Ziffern die Tausende, in den drey niedern die Einer dieser Klasse enthalten sind; mithin

3. Da auf einmal immer nur drey Ziffern ausgesprochen werden, so schreibe man solche auf einmal (was doch jeder leicht kann) und setze, im Falle es Tausende sind, unten ein Strichgen am Ende oder (,), sind es hingegen Einheiten von Millionen, Billionen u. s. w., oben eines, oder zwey Strichgen d. i. (') ('') u. s. f.

4. Die übrigen Stellen jeder Klasse, von welchen in der ausgesprochenen Zahl nichts vorkömt, fülle man mit Nullen aus; so im gegebenen Beyspiele:

6 4, 3 2 4'' 0 0 0, 2 3 6' 0 0 0' 0 2 4

§. 27.

Erklärung:
Eine durch Ziffern ausgedrückte Zahl aussprechen §. 25. oder eine gegebene Zahl mit Ziffern bezeichnen §. 26. heißt Numeriren.

§. 28.

Erklärung:

a Um allgemeine, das ist, noch unbestimmte Zahlen auszudrücken, bedient man sich der Buchstaben, und zwar

α der Anfangsbuchstaben, wenn sie gegebene, oder bekannte Zahlen bezeichnen, z. B. a, b, c

β der Endesbuchstaben, wenn sie unbekannte Zahlen und Größen ausdrücken sollen.

b Manchmal nimmt man selbst bey bestimmte Zahlen der Kürze wegen Buchstaben.

c Sind nun die nemlichen Größen öfter da, so setzt man solchen eine Ziffer vor, die ihre Anzahl angiebt, und welche man den Cöfficienten dieser Größe nennt.

d die Rechnung mit Zahlen,

α die durch Ziffern ausgedrückt sind, heißt daher die Ziffern = oder auch schlechthin die Zahlenrechnung.

β wenn hingegen solche mit Buchstaben bezeichnet sind, die **Buchstabenrechnung** (calculus litteralis).

I Zusatz:

I Zusatz:

Obgleich a in der Buchstabenrechnung jede Größe bezeichnen kann, so bezieht sich doch der nemliche Buchstab a in der nähmlichen Rechnung immer auf die nähmliche Größe, und dieses versteht sich von selbst von allen übrigen Buchstaben.

II Zusatz:

In der Buchstabenrechnung sind die mit gleichen Buchstaben bezeichneten Größen **gleichartig**, z. B. 4 a, 5 a u. s. f.; die mit verschiedenen Buchstaben bezeichneten **ungleichartig** z. B. 4 a, 3 b, 4 c u. s. f. Es mögen ihre Cöfficienten beschaffen seyn, wie sie wollen. (§. 1. b)

Anmerkung:

Um die Lehren in der Ziffernrechnung mit gehöriger Schärfe zu beweisen ist's zuträglich, ihnen sogleich die Buchstabenrechnung beyzufügen.

II Abschnitt.

Von der Addition und Subtraction ganzer Zahlen und Größen.

§. 29.

Erklärung:

a **Addiren** heißt eine Größe finden, die mehrern zusammengenommen gleich ist, letztere Größen nennet man die **Summanden**, erstere die **Summe**; das

Zeichen

Zeichen der Addition ist (+), wird mit plus oder mit und ausgesprochen.

b **Subtrahiren**, oder eine Größe von einer andern abziehen heißt eine Größe finden, die zur ersten addirt, die zweyte giebt; man heißt jene Größe, die man abzieht, den **Subtrahend**, von der man abzieht, den **Minuend**, und die man sucht, den **Rest**, das Zeichen der Subtraction ist (—) und wird durch Minus gelesen.

c Werden mehrere Größen, zwischen welchen sich das Zeichen + oder — befindet, als eine betrachtet, so schließt man solche in Klammern ein, z. B. (a + b); (a — b); (a — 26 + d) u. s. f.

I Zusatz:

Durch die Addition werden mehrere Größen als Theile zu einem Ganzen verbunden, und durch die Subtraction, das Ganze in seine Theile wieder aufgelöset, d. i. Addition und Subtraction dienen einander wechselseitig zur Probe; wenn man zur Differenz den Subtrahend addirt, so bekömt man den Minuend zur Summe und wenn man bey einer gefundenen Summe einen Summanden abzieht, so bekömt man die übrigen zum Reste.

II Zusatz:

Nur gleichartige Größen geben in der Summe ein Ganzes, das ist, nur sie können eigentlich zusammengezählt, mithin addirt und voneinander subtrahirt werden.

III Zusatz:

III Zusatz:

Einer Größe wird ein Ganzes, oder die Summe mehrerer Größen addirt, oder davon subtrahirt, wenn man das Ganze auf einmal, oder alle Theile einzeln in beliebiger Ordnung nacheinander addirt oder subtrahirt, das ist: $a + (b + c) = a + b + c = a + c + b$

Eben so $a - (b + c) = a - b - c = a - c - b$

§. 30.

Anwendung des allgemeinen 9ten Grundsatzes §. 19. auf die Addition und Subtraction; oder Grundsätze der Addition und Subtraction:

1. Gleiches zu Gleichen addirt, von Gleichen subtrahiert, giebt gleiche Summen, und gleiche Reste, d. i. wenn $a = b$ $c = d$, so ist $a + c = b + d$; und $a - c = b - d$

2. Zu Gleichen Ungleiches, oder zu Ungleichen Gleiches addirt, giebt Ungleiches, und zwar wo das Größere hinzukömt, ist die Summe größer, und beym Kleinern ist auch die Summe kleiner; oder:

wenn $a = a$ Eben so $b \triangleright c$

$b \triangleright c$ $a = d$

so ist $a + b \triangleright a + c$ $a + b \triangleright c + d$

3. Wenn man dem Größern mehr als dem kleinern addiert, ist erstere Summe größer als letztere, oder wenn $a \triangleright b$; $c \triangleright d$ so ist $a + c \triangleright b + d$

4. Zieht man von Gleichen Ungleiches ab, so giebt der größere Subtrahend den kleineren Rest; und wenn

man

man von Ungleichen Gleiches subtrahiert, so bleibt vom größeren Minuend der größere Rest, oder

wenn $a = a$ eben so $b > c$

$b > c$ $a = a$

so ist $a - b < a - c$ $b - a > - c a$

5. Zieht man vom Größern weniger, als vom Kleinern ab, so ist ersterer Rest größer, oder

wenn $a > b$; $c < d$; so ist $a - c > b - d$

§. 31.

Aufgabe:

Mehrere gegebene ganze Zahlen zu addiren.

Z. B. 9462 + 5327 + 420

Auflösung:

1. Man schreibe die gegebenen Zahlen so untereinander, daß die Einer unter Einer, Zehner unter Zehner u. s. f. zu stehen kommen (Aus §. 24. kommen alle Ziffer an ihre gehörige Stellen für sich schon, wenn man nur Einer unter Einer setzt), und ziehe unten einen Strich.

2. Nun addire man die Einer zusammen, und setze ihre Summe, wenn sie kleiner als 10, darunter, ist sie aber 10 und darüber, so schreibe man nur das letzte Ziffer derselben unter die Einer, und

3. Behalte das höhere Ziffer als einen Zehner, und addiere solches den folgenden Zehnern, deren Summe man wie bey den Einern findet.

4. Auf die nemliche Art verfahre man an allen folgenden Stellen. z. B.

4962
5327
420
Summe = 10709

Beweis:

Letztere Zahl, die man auf die vorgeschriebene Art erhält, besteht aus allen Einern, Zehnern u. s. w. der gegebenen Summanden, ist also denselben zusammengenommen gleich, folglich (§. 29.) die verlangte Summe.

§. 32.

Aufgabe:

Zwey Zahlen voneinander zu subtrahiren z. B.

2006479 — 483869

Auflösung:

1. Man setze den Subtrahend dergestalt unter den Minuend, daß Einer unter Einer, Zehner nnter Zehner u. s. w. zu stehen kommen, und ziehe unten einen Strich.

2. Nun subtrahire man die Einheiten, d. i. bestimme wie viel Einheiten dem Subtrahend addirt werden müssen, damit er eben so viel als der Minuend hat, und setze diese Zahl, oder den Rest darunter.

3. Eben so verfahre man an allen folgenden Stellen bey den Zehnern, Hunderten u. s. w.

4. Ist

4. Ist an einer Stelle das Ziffer im Subtrahend grösser als im Minuend, so borge man im letztern von der nächsten höhern Ziffer 1, welches (§. 24) in der gegebenen nächstniedern Stelle 10 gilt, und folglich die schon vorhandenen Einheiten um 10 vermehrt; bemerke aber bey dem vorhergehenden Ziffer die Wegnahme durch ein oben beygesetztes Strichgen, und ziehe nun das Ziffer des Subtrahends von dieser neuen Summe ab.

5. Stünde an einer Stelle des Minuendus o, so verfährt man eben so, und im Falle, daß das folgende Ziffer desselben wieder o seyn würde, so borgt man vom nächstdarauffolgenden 1, dieses nun gilt in der nächstniederen Stelle 10, und 1 weggenommen läßt 9, hingegen gilt wieder diese weggenommene Einheit am folgenden Platz 10, und man kann also an allen diesen Stellen wie oben N. 2. subtrahiren. z. B.

2′ 0′ 0 6′ 4 7 9
4 8 3 8 6 9

Rest = 1 5 2 2 6 1 0

Beweis:

Letztere gefundene Zahl giebt den Rest bey den Einheiten, Zehnern u. s. w., mithin bey allen Theilen an, wie viel dem Subtrahend addirt werden muß, um die über ihm stehende Theile des Minuendus zuerzeugen, mithin ist sie der gesuchte Unterschied (§. 29.) der beyden gegebenen Zahlen.

I Zusatz:

I Zusatz:

Besteht der Minuend, oder der Subtrahend oder beyde aus mehreren Zahlen, so zieht man von der Summe des erstern, die Summe der letztern Zahlen ab. z. B.

$(14 + 6) - (12 + 3) = 20 - 15 = 5$

§. 33.

Lehrsatz:

Der Differenz zweyer Größen wird eine andere Größe addirt, wenn man letztere entweder dem Minuend addirt, oder vom Subtrahend abzieht. d. i. $(a - b) + d = (a + d) - b = a - (b - d)$ oder $(16 - 5) + 4 = 20 - 5 = 16 - 1 = 11 + 4 = 15$

Beweis:

Der Rest wird allemal um so viel größer, als man den Minuend vermehrt, oder wenn der Minuend unverändert bleibt, als man den Subtrahend vermindert.

§. 34.

Lehrsatz:

Von der Differenz zweyer Größen wird eine andere abgezogen, wenn man letztere vom Minuend abzieht, oder dem Subtrahend addirt d. i.

$(a - b) - d = (a - d) - b = a - (b + d)$

$(16 - 5) - 4 = 12 - 5 = 16 - 9 = 11 - 4 = 7$

Beweis:

Beweis:

Die Differenz wird um so viel vermindert als man vom Minuend weguimmt, oder um was man den Subtrahend vergrößert.

§. 35.

Erklärungen:

a Größen, die bey ihrer Verbindung einander vermehren, sind übereinstimmig; die aber

b bey ihrer Vereinigung einander so vermindern, daß die kleinere verschwindet, und von der größern nur so viel übrig bleibt, als ihr Ueberschuß beträgt, sind entgegengesetzte Größen. z. B. Schulden und Vermögen; Vor- und Rückwärtsgehen, Steigen, und Fallen.

I Zusatz:

Entgegengesetzte Größen müssen an sich und ausser ihrer Entgegensetzung betrachtet, gleichartige Größen seyn; z. B. Schulden und Vermögen beziehen sich beyde auf eine Summe Geldes; Vor- und Rückwärtsgehen auf eine bestimmte Größe der Bewegung u. s. f. zu nähern Entwicklung will ich indessen eine Größe mit A, und ihr gleiches Gegentheil mit n A ausdrücken.

II Zusatz:

Gleiche entgegengesetzte Größen heben sich einander auf d. i,

$$A + nA = o, \text{ oder}$$

10 fl.

10 fl. Vermögen + 10 fl. Schulden = 0 Vermögen = 0 Schulden.

III Zusatz:

Entgegengesetzte Grösen addiren ist eben so viel, als eine der kleinern gleiche, mit der grösern übereinstimmige Größe von letzterer subtrahiren. d. i.:

$$6\,A + 2\,nA = 6\,A - 2\,A = 4\,A$$

6 fl. Vermögen + 2 fl. Schulden = 6 fl. Vermögen — 2 fl. Vermögen.

IV Zusatz.

Von einer Größe eine andere kleinere subtrahiren, ist eben so viel, als ersterer das gleiche Gegentheil der letztern addiren. d. i.

$$6\,A - 2\,A = 6\,A + 2\,nA$$

6 fl. Vermögen — 2 fl. Vermögen = 6 fl. Vermögen + 2 fl. Schulden.

V Zusatz:

Von einer Größe eine ihr entgegengesetzte subtrahiren, ist eben so viel, als eine der letzten gleiche mit der ersten übereinstimmige Größe addiren. oder

$$6\,A - 2\,nA = 6\,A + 2\,A$$

6 fl. Vermögen — 2 fl. Schulden = 6 fl. Vermögen + 2 fl. Vermögen.

Denn $6\,A = 6\,A + 2\,nA + 2\,A$ (II Zusatz.) nimmt man also $2\,nA$ weg, so bleibt als Rest $6\,A + 2\,A$.

VI Zusatz:

VI Zusatz:

Zu einer Größe eine andere addiren ist eben so viel, als von ersterer das gleiche Gegentheil der letztern subtrahiren, d. i.

$$6\,A + 2\,A = 6\,A - 2\,n\,A\,.$$

6 fl. Vermögen + 2 fl. Vermögen = 6 fl. Vermögen — 2 fl. Schulden.

VII Zusatz:

Von Zwey entgegengesetzten Größen kann man (III — VI Zusatz.) die eine als die zu addirende, die andere als die zu subtrahirende betrachten, mithin die erste positiv nennen, und durch das Additions-Zeichen (+) darstellen; und letztere negativ heißen, und ihr das Subtractionszeichen (—) vorsetzen.

VIII Zusatz:

Gleichartige Größen, wovon einer das Zeichen (+) die andern das Zeichen (—) vorangesetzt ist, stehen in einem Verhältniß wie entgegengesetzte Größen, und können als solche behandelt werden. Bey positiven Größen, wenn sie im Anfange stehen wird gewöhnlich das Zeichen (+) weggelassen.

§. 36.

Lehrsatz:

Gleichartige Größen, wenn sie einerley Zeichen haben, werden addirt, wenn man sie zusamen zählet, d. i. ihre Cöfficienten addirt, und der Summe das nemliche Zeichen giebt. z. B.

$$+\,4\,a + 2\,a = +\,6\,a$$

$$-\,4\,a - 2\,a = -\,6\,a$$

Beweis:

Die Größen sind so wohl im ersten, als im zweytem Falle unter sich einstimmig, machen also allemal als Theile ein Ganzes von der nemlichen Beschaffenheit aus, oder das Ganze bekömt allemal das Zeichen seiner Theile.

§. 37.

Lehrsatz:

Gleichartige Größen mit verschiedenen Zeichen werden addirt, wenn man die kleinere von der größern abzieht, und dem Reste das Zeichen der größern giebt. oder

$$+5a-2a=+3a$$
$$-5a+2a=-3a$$

Beweis:

In beyden Fällen sind die Summanden entgegengesetzte Größen (§. 35. VIII Zusatz) mithin muß die kleinere von der größern subtrahirt werden (§. 35. III Zusatz) wo offenbar dem Reste das Zeichen des Minuends zukömt.

Zusatz:

Ungleichartige Größen können nicht zu einem Ganzen verbunden, oder zusammengezählet werden, man setzt sie also mit ihren Zeichen unverändert hin. d. i. $5c-3d-6e=5c-3d-6e$

§. 38.

§. 38.

Lehrsatz:

Größen werden von einander subtrahirt, wenn man im Subtrahend das Zeichen ändert, und die Größen addirt. d. i.

$$\begin{array}{r} +5d-2a-5c \\ +2d+3a-2c \\ \hline -\quad -\quad + \\ \hline \text{Rest} = +3d-5a-3c \end{array}$$

Beweis:

Wenn man im Subtrahend die Zeichen ändert, so werden die Größen desselben in ihre entgegengesetzte verwandelt, (§. 35. VIII Zusatz) und durch ihre Addition sie selbst subtrahirt (§. 35. III Zusatz.)

§. 39.

Aufgabe:

Zusamengesetzte Größen mit verschiedenen Zeichen zu addiren.

Auflösung:

1. Man schreibe die Größen so an, daß die gleichartigen untereinander zu stehen kommen, und ziehe einen Strich.

2. Gleichartige Größen mit einerley Zeichen addire man nach (§. 36.), mit verschiedenen Zeichen nach. (§. 37.)

3. Bey ungleichartigen verfahre man nach (§. 37 Zus.)

z. B. $5a - 3b - 4ab + 2d + e$
$2a - 2b + 6ab - 5d - f$

Summe $= 7a - 5b + 2ab - 3d + e - f$

§. 40.

Aufgabe:
Zusamengesetzte Größen mit verschiedenen Zeichen voneinander zu subtrahiren.

Auflösung:

1. Man schreibe den Subtrahend so unter den Minuend, daß gleichartige Größen untereinander zu stehen kommen,

2. ändere im Subtrahend alle Zeichen und addire (§. 38). Z. B.

$2a + 5b - 3d + e$
$a - 2b + 2d - f$
$- + - +$

Rest $= a + 7b - 5d + e + f$

§. 41.

Erklärung:
Eine Zahl, die mit einer gegebenen Zahl zusamengenommen die nächsthöhere Einheit (§. 24.), das ist, eine Zahl erzeugt, die zum höchsten Ziffer 1, und nachher so viele 0, als die gegebene Zahl Ziffern enthält, heißt die decadische Ergänzung der gegebenen Zahl. Der Kürze wegen drücke man die gegebene Zahl mit N, die Einheit der nächsthöhern Ordnung mit

U,

U, die dekadische Ergänzung mit C aus. z. B. So ist für N = 64, die dekadische Ergänzung C = 36, denn 64 + 36 = 100 = U; eben so ist für N = 384, C = 616; weil 384 + 616 = 1000 = U ist.

Zusatz:

Man findet zu einer gegebenen Zahl ihre dekadische Ergänzung, wenn man erstere von ihrer nächst höhern Einheit subtrahirt,

denn $N + C = U$

$N = N$

$C = U - N$ (§. 30. N. 1.)

Anmerkung:

Man kann allemal die dekadische Ergänzung einer gegebenen Zahl sehr leicht finden, ohne daß man nöthig hat die nächsthöhere Einheit anzuschreiben; denn da letztere nach 1 lauter 0 hat; so darf man nur das niedrigste Ziffer der gegebenen Zahl von 10, alle übrige immer von 9 abziehen. Z. B. Man sucht zur Zahl 4 6 2 5 ihre Ergänzung; so giebt 5 von 10 zum Rest 5; 2 von 9 läßt 7, 6 von 9 giebt 3, und 4 von 9 bleibt 5 zum Reste, mithin C = 5 3 7 5. wo offenbar 4 6 2 5 + 5 3 7 5 = 1 0 0 0 0.

§. 42.

Lehrsatz:

Von einer Zahl A wird eine andere N subtrahirt, wenn man die dekadische Ergänznng C von N der Zahl A

 addirt,

addirt, und von der Summe die nächsthöhere Einheit U subtrahirt. d. i. $A - N = (A + C) - U$

Beweis:

$N + C = U$ ferner $A = A$

$C = C$ $N = U - C$

$- \quad - \quad +$

$N = U - C$ (§. 30 N. 1.) $A - N = A - U + C =$
$(A + C) - U$

Beyspiel: Man soll von 5645 die Zahl 3494 abziehen:

$A = 5645$

$C = 6506$

$A + C = 12151$

$U = 10000$

$A + C - U = 2151 = A - N$

Anmerkung: Bey Rechnungen mit Logarithmen gewährt letztere Methode vermittels der Addition der dekadischen Ergänzung Zahlen zu subtrahiren viele Bequemlichkeit, deßhalben habe ich die Theorie davon hier vorgetragen.

III Abschnitt.

Von der Multiplication und Division ganzer Zahlen und Größen.

§. 43.

Erklärungen:

a Multipliciren heißt eine Größe A so und so oft nehmen, als es eine gegebene Zahl m angiebt; die

gegebene Größe A, und die Zahl m nennet man die **Factoren**, und zwar den Factor A den **Multiplicand**, den andern Factor m den **Multiplicator**, und die durch die Multiplication erzeugte Größe P das **Product**. Das Zeichen der Multiplication ist (×) oder (.) welches man zwischen die Factoren setzt. Z. B. $4 \times 3 = 12$.

b Eine Größe A durch eine Zahl m **dividiren** heißt eine Größe Q finden, die mit m multiplicirt die Größe A wieder giebt. Man heißt die Größe A den **Dividend**, die Zahl m den **Divisor**, die gefundene Größe Q den **Quotienten**. Das Zeichen der Division ist (:) welches zwischen den Dividend, und den Divisor gesetzet wird. Z. B. $12 : 3 = 4$.

I Zusatz: Mit einer ganzen Zahl multipliciren, heißt den Multiplicand so oft zu sich addiren, als der Multiplicator Einheiten enthält.

II Zusatz: In der Buchstabenrechnung werden im Producte die Factoren ohne Zeichen zusammengesetzet d. i. $a \times b = ab$.

III Zusatz: Jede Größe mit 1 multiplicirt, oder dividirt, giebt die unveränderte Größe zum Product, und Quotienten; d. i. $a \times 1 = a$; und $a : 1 = a$

IV Zusatz: Wenn der Dividend und der Divisor gleich sind, so ist der Quotient 1, d. i. $a : a = 1$

V Zusatz: Eine Größe mit der nemlichen Zahl multiplicirt und dividirt bleibt unverändert; oder $a \times m : m = a$.

§. 44.

§. 44.

Anwendung des allgemeinen Grundsatzes (§. 19 N. 9.) auf die Multiplication und Division: oder Grundsätze der Multiplication und Division:

1. Gleiches mit Gleichen multiplicirt, oder dividirt, giebt gleiche Producte, und Quotienten d. i.

wenn $a = b$	Und wenn $a = b$
$c = d$	$c = d$
so ist $a\,c = b\,d$	so ist wieder $a : c = b : d$

2. Gleiches mit Ungleichem, oder Ungleiches mit Gleichem multiplicirt, oder dividirt, giebt ungleiche Producte und Quotienten.

3. Bey gleichen Multiplicanden giebt der grössere Multiplicator, und bey gleichen Multiplicatoren der grössere Multiplicand das grössere Product; oder

wenn $A = A$	Und $A \rhd B$
$n \rhd m$	$n = m$
so ist $n\,A \rhd m\,A$;	so ist $n\,A \rhd m\,B$

4. Bey gleichen Dividenden giebt der kleinere Divisor, und bey gleichen Divisoren der grössere Dividend den grössern Quotienten, oder

wenn $A = B$	Und $A \rhd B$
$m \lhd n$	$m = n$
so ist $A : m \rhd B : n$	$A : m \rhd B : n$

5. Der

5. Der größere Multiplicand mit dem größern Multiplicator giebt das größere Product, und der größere Dividend mit dem kleinern Divisor den größern Quotienten oder

wenn	$A > B$	Und	$A > B$
	$n > m$		$m < n$
so ist	$n\,A > m\,B$		$A : m > B : n$

§. 45.

Lehrsatz:
Bey der Multiplication ganzer Zahlen steckt der eine Factor so oft im Producte, als die Einheit im andern Factor.

Beweis:
Der eine Factor z. B. 4 läßt sich durch * * * *, der andere z. B. 3 durch * * *. mithin das ganze Product durch * * * * (§. 43. I Zus.) anschaulich darstelln;

* * * *
* * * *

nun kömmt offenbar der eine Factor 4, oder die horizontale Reihe so oft vor, als der andere Factor 3 Einheiten hat; und umgekehrt: die vertikale Reihe oder der Factor 3 steht so oft im Producte da, als der andere Factor 4 Einheiten, oder die horizontale Reihe Sternchen enthält.

I Zusatz: Bey ganzen Zahlen geben Factoren mit veränderter Ordnung einerley Product; und wenn letzteres durch den einen Factor dividirt wird, so erhält man den andern Factor zum Quotienten.

II Zusatz: Bey der Division ganzer Zahlen giebt der Dividend durch den Quotienten dividirt, den vorigen

Divi=

Divisor zum Quotienten, d. i. 12 : 3 = 4; und 12 : 4 = 3.

III Zusatz: Bey ganzen Zahlen dienen die Division und Multiplication einander wechselseitig zur Probe.

§. 46.

Lehrsatz:

Die Summe zweyer oder mehrerer Größen wird durch eine Zahl multiplicirt, oder dividirt, wenn man jede einzelne Größe multiplicirt, oder dividirt, und am Ende die einzelnen Producte oder Quotienten addirt. d. i.

$(a + b) \times n = n\,a + n\,b$; und $(a + b) : n = a : n + b : n$.

Beweis:

Offenbar wird das Ganze multiplicirt, und im zweyten Falle dividirt, wenn man jeden einzelnen Theil mit der gegebenen Zahl n multiplicirt oder dividirt. (§. 19. 2.)

§. 47.

Lehrsatz:

Eine Größe wird mit der Summe zweyer oder mehrerer Zahlen multiplicirt, wenn man sie mit jeder einzelnen Zahl multiplicirt, und am Ende die Producte addirt; oder:

$$a \times (m + n) = m\,a + n\,a$$

Beweis:

Beweis:

Man multiplicirt die Größe offenbar mit dem ganzen Multiplicator, wenn man sie mit jedem einzelnen Theile desselben multiplicirt.

§. 48.

Lehrsatz:

Die Differenz zweyer Größen wird durch eine Zahl multiplicirt oder dividirt, wenn man jede einzelne Größe damit multiplicirt, oder dividirt, und am Ende die Producte subtrahirt; oder,

I $(a - b) \times n = na - nb$; und II $(a - b) : n = a : n - b : n$

Beweis:

Von I. Man setze $a - b = d$; so ist $a = b + d$ (§. 30. Nr. 1. u. §. 37.), ferner $na = nb + nd$ (§. 43. u. 46.) mithin $na - nb = nd = n(a - b)$

Beweis:

Von II. $(a : n - b : n) \times n = a - b$ (§. 47. u. 44. V. Zus.)

§. 49.

Lehrsatz:

Eine Größe wird mit der Differenz zweyer Zahlen multiplicirt, wenn man sie mit beyden multiplicirt, und die Producte subtrahirt; oder

$a \times (m - n) = ma - na$

Beweis:

Beweis:

Man setze wieder $m - n = d$; so ist $m = d + n$ und $a \times m = a \times (d + n) = a \times d + a \times n$ (§. 47.) folglich $a \times m - a \times n = a \times d$; oder $ma - na = a \times (m - n)$

§. 50.

Lehrsatz:

Ein Quotient wird mit einer ganzen Zahl multiplicirt, wenn man mit ihr entweder den Dividend multiplicirt, oder den Divisor dividirt; und der Quotient wird mit einer ganzen Zahl dividirt, wenn man mit solcher entweder den Dividend dividirt, oder den Divisor multiplicirt, d. i.

I $(a : b) \times n = n\,a : b = a : (b : n)$

II $(a : b) : n = (a : n) : b = a : (b \times n)$

Beweis von I. Wenn man den Dividend a, oder das Ganze n mal so groß nimmt, und eben so viele Theile macht, als vorher, so muß offenbar jeder Theil, oder der Quotient n mal größer werden; und wenn man den Dividend a oder das Ganze unverändert läßt, solches aber in n mal weniger Theile zerfällt als vorher, so muß wieder jeder Theil, oder der Quotient n mal größer werden.

Beweis von II. Wenn man den Dividend mit n dividirt, so wird das Ganze n mal kleiner, multiplicirt man aber den Divisor, so wird die Anzahl der Theile n mal größer, mithin allemal ein Theil oder der Quotient n mal kleiner.

Zusatz:

Zusatz:

Der Quotient bleibt unverändert, wenn man den Dividend sowohl, als den Divisor zugleich mit der nemlichen Zahl multiplicirt, oder dividirt, d. i.

$$a : b = ma : mb = (a : n) : (b : n)$$

§. 51.

Lehrsatz:

Ein Product zweyer ganzen Zahlen wird mit einer ganzen Zahl multiplicirt, wenn man einen der Factoren damit wirklich multiplicirt, und den andern unverändert beysetzt, oder wie man sich der Kürze wegen ausdrückt, wenn man nur einen Factor multiplicirt. d. i.

$$(4 \times 3) \times 2 = 8 \times 3 = 4 \times 6$$

Beweis:

$4 \times 3 = 4 + 4 + 4$ (§. 43. I. Zus.)
$2 = 2$

$(4 \times 3) \times 2 = 8 + 8 + 8$ (§. 44. N. 1.)
$= 8 \times 3$

Eben so ist: $4 \times 3 = 3 \times 4$ (§. 45. I Zus.)
$= 3 + 3 + 3 + 3$ $2 = 2$

$(4 \times 3) \times 2 = 6 + 6 + 6 \times 6$
$= 6 \times 4 = 4 \times 6$

I Zusatz: Eine ganze Zahl wird mit dem Producte zweyer ganzen Zahlen multiplicirt, wenn man nur mit einem Factor multiplicirt, und den andern beysetzt.

setzt. d. i. $2 \times (4 \times 3) = 8 \times 3 = 4 \times 6$
denn $2 \times (4 \times 3) = (4 \times 3) \times 2 = 8 \times 3$

II Zusatz: Ein Product zweyer ganzen Zahlen wird mit einer ganzen Zahl dividirt, wenn man einen Factor dividirt, und den andern dem Quotienten beysetzet
d. i. $(8 \times 6) : 2 = 4 \times 6 = 8 \times 3$
Denn $(4 \times 6) \times 2 = 8 \times 6$; und eben so $(8 \times 3) \times 2 = 8 \times 6$ (§. 43. b.)

III Zusatz: Eine ganze Zahl wird durch das Product zweyer ganzen Zahlen dividirt, wenn man mit einem Factor dividirt, und den andern dem Quotienten als Divisor beyfüget; oder $24 : (4 \times 3) = 6 : 3 = 8 : 4$
Denn $(6 : 3) \times (4 \times 3) = (6 \times 4) : (3 : 3)$ (§. 50) $= 24$; und eben so $(8 : 4) \times (4 \times 3) = (8 \times 3) : (4 : 4) = 24$

IV Zusatz: Eine ganze Zahl wird mit 10, 100 u. s. w. multiplicirt, wenn man dem Multiplicand so viele Nullen anhängt, als der Multiplicator hat; oder:
$24 \times 10 = 240$; $24 \times 100 = 2400$;
denn der Multiplicand wird durch Anhängung einer Nulle 10 mal, durch zwey Nullen 100 mal größer u. s. f. (§. 24. und §. 43. I Zus.)

V Zusatz: Wenn einer oder beyde Factoren Nullen nach sich haben, so besteht das Product aus dem Producte der Zahlziffern mit so vielen angehängten Nullen, als beyde Factoren miteinander haben; oder
$4 \times 30 = 120$; $400 \times 30 = 12000$;
denn $4 \times 30 = 4 \times (3 \times 10) = 12 \times 10 = 120$

Und

Und $400 \times 30 = (4 \times 100)(3 \times 10) = 12 \times 1000 = 12000$

§. 52.

Aufgabe:

Das Einmaleins, oder eine Tafel zu verfertigen, die alle Producte der ersten 9 Zahlen enthält.

Auflösung:

Man schreibe in einer horizontalen Reihe die ersten 9 Zahlen, unter solche setze man die Summe jeder Zahl zu sich selbst, so hat man das Duplum, zu jedem Duplo addire man wieder die ersten 9 Zahlen, so bekömt man ihr dreyfaches u. s. f.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

Anmerk. In der Ausübung dient um Producte grösserer einfacher Factoren als 5 zu finden folgende mechanische Methode: man schliesse die Finger an beyden Händen, und öffne erstlich in der einen Hand so viele

Finger,

Finger, als der eine Factor über 5 ist, z. B. bey 8 öffne man drey Finger; eben so öffne man in der andern Hand so viele Finger, als der andre Factor mehr Einheiten, als die Zahl 5 hat; z. B. bey 7 öffne man zwey Finger; nun zähle man an beyden Händen die stehenden Finger als Zehner, und addire als Einer das Product der liegenden Finger hinzu. Im gegebenen Beyspiele stehen in der einen Hand 3, in der andern 2 Finger aufrecht, dieses macht 50, ferner sind in der einen Hand noch 2, in der andern aber 3 Finger geschlossen, mithin $2 \times 3 = 6$; folglich beträgt das ganze Product $8 \times 7 = 56$. Durch practische Uebung kann man sich hierinn bald eine Fertigkeit erwerben.

§. 53.

Aufgabe:

Eine ganze Zahl von mehreren Ziffern mit einer andern von einem Ziffer zu multipliciren.

Auflösung:

1. Man setze das Ziffer des Multiplicators unter das niedrigste Ziffer des Multiplicands, und ziehe einen Strich,

2. suche aus der Tabelle (§. 52.) das Product des über ihr stehenden niedrigsten Ziffers, so ist des Productes niedrigstes Ziffer ein Einer, man setze solchen darunter;

3. Besteht das gefundene Product aus zweyen Ziffern, so behalte man das höhere Ziffer als einen Zehner im Gedächtnisse,

4. suche

4. suche wieder das Product des Multiplicators und des nächstfolgenden Ziffers, oder Zehners, so ist das niedrigste Ziffer davon ein Zehner (§. 51. V Zus.) zu diesem Producte addire man den Zehner des vorigen Productes, und setze das niedrigste Ziffer davon zur linken Seite des vorigen Nr. 2.

5. das höhere Ziffer davon behalte man wieder als einen Hunderter für das folgende Product;

6. Auf die nämliche Art verfahre man bey allen folgenden Ziffern des Multiplicands. z. B.

3 2 4 7 8
4
Product = 1 2 9 9 1 2

Beweis:

Man hat alle Theile des Multiplicands so vielmal zu sich addirt, als der Multiplicator Einheiten enthält, folglich ist die gefundene Zahl das gesuchte Product. (§. 43. I Zus. und §. 46.)

§. 54.

Aufgabe:

Zwey ganze Zahlen miteinander zu multipliciren, wenn sie beyde aus mehrern Ziffern bestehen.

Auflösung:

1. Man setze unter die eine Zahl die andre so, daß die Einer unter Einer zu stehen kommen, und ziehe einen Strich,

2. multiplicire mit dem niedrigsten Ziffer der letztern Zahl nach (§. 53.) die ganze ober ihr stehende Zahl oder den Multiplicand,

3. verfahre eben so bey dem nächsthöhern Ziffer des Multiplicators, rücke aber das Product um eine Stelle weiter zur linken, so daß das niedrigste Ziffer desselben an dem Platze der Zehner zu stehen kömt (§. 51. V Zus.)

4. Suche auf die nemliche Art die Producte der noch folgenden höhern Ziffern des Multiplicators, und rücke immer das folgende um eine Stelle weiter zur Linken, als das vorhergehende, weil der Multiplicator an jeder Stelle um das Zehnfache am Localwerthe zunimmt (§. 24.)

5. Addire endlich alle gefundene Partialproducte, so ist die Summe derselben das gesuchte Product der gegebenen Zahlen, z. B.

3624
236

21744
10872
7248

Product = 855264

Beweis:

Jedes gefundene Partialproduct Nr. 2. 3. 4. ist ein Product eines Theils des Multiplicators in alle Theile des Multiplicands, oder den ganzen Multiplicand;

da

da man nun mit allen Ziffern des Multiplicators so verfährt, so ist die Summe aller dieser Producte das Product des ganzen Multiplicators in den ganzen Multiplicand (§. 46. u. 47.)

§. 55.

Aufgabe:

Eine ganze Zahl durch eine andere zu dividiren, wenn letztere nur aus einem Ziffer besteht.

Auflösung:

1. Man setze die zweyte Zahl als Divisor unter das höchste Ziffer der erstern, oder, im Falle das Ziffer des Divisors größer als das höchste des Dividends seyn sollte, unter das nächstfolgende; ziehe zur Rechten beyder Zahlen einen senkrechten Strich.

2. Nehme aus der Tabelle (§. 52.) in der ersten verticalen Reihe den Divisor, und suche in der treffenden horizontalen Spalte jenes Product, welches den ersten Ziffern des Dividends gleich, oder zunächst kleiner ist, so steht darüber in der obersten horizontalen Spalte das entsprechende Ziffer des Quotienten,

3. Diesen Quotienten setze man zu nächst an den gezogenen Verticalstrich, und das gefundene Product unter den Divisor, ziehe wieder einen horizontalen Strich, und subtrahire dieses Product von den ersten Ziffern des Dividends;

4. setze den treffenden Rest unter den Strich, und füge ihm das folgende Ziffer im Dividend bey, schreibe

wieder den Divisor darunter und verfahre aufs neue nach Nr. 2.; den gefundenen Quotienten aber gebe man zur Rechten des vorigen seine Stelle,

5. und wiederhole dieses verfahren so lange, bis alle Ziffern des Dividendus erschöpft sind.

6. Trifft es an einer Stelle zu, daß kein Rest bleibt, und das folgende Ziffer im Dividend kleiner als der Divisor ist, so schreibe man an die treffende Stelle des Quotienten Null, und füge dem vorigen noch das darauf folgende Ziffer des Dividends bey, und setze die Division wieder fort. z. B.

$$\begin{array}{r|l} 36254 & 7509 \\ 5 & \\ \hline 35 & \\ \hline 12 & \\ 5 & \\ \hline 10 & \\ \hline 25 & \\ 5 & \\ \hline 25 & \\ \hline 45 & \\ 5 & \\ \hline 45 & \\ \hline \end{array}$$

Beweis:

Durch das verfahren Nr. 2. u. 3. wird eigentlich der Quotient in so ferne bestimmet, in wie ferne der Di-

vidend nur aus einem, oder zwey Ziffern bestünde, mithin ist der gefundene Quotient so oft zehnmal kleiner als der wahre, so viele Ziffer im Dividend nach den obigen folgen; das ist: dem gefundenen Quotienten sollten so viele Nullen beygefüget werden, als im Dividend Ziffern nachstehen: da man aber Nr. 4.—6. für alle diese Ziffern eben so viele in den Quotienten setzet, und ihnen immer ihre Stellen zur Rechten giebt, so erhält dadurch das zuerst gefundene Ziffer des Quotienten sowohl, als alle übrige ihren treffenden Localwerth; mithin sind diese einzelne Quotienten die wahren Partialquotienten aller Theile des Dividends, folglich ist ihre Summe der wahre Quotient für den ganzen Dividend (§. 46.)

§. 56.

Aufgabe:

Eine ganze Zahl mit einer andern kleinern Zahl, die beyde aus mehreren Ziffern bestehen, zu dividiren.

Auflösung:

1. Man verfahre wie bey der vorigen Aufgabe (§. 55.) nur kann man den treffenden Quotienten nicht aus der Tabelle nehmen;

2. man muß also sich etwa auf einer eigenen Tabelle vorher alle Producte des gegebenen Divisors mit den ersten 9 Zahlen entwerfen, und daraus die treffenden Quotienten bestimmen, oder

3. man kann das erste Ziffer des Divisors zu einer

Norm nehmen, und nach obiger Tabelle (§. 52.) das Ziffer im Quotientrn setzen, wo aber erst das Product desselben in den ganzen Divisor entscheiden muß, ob es das richtige ist, oder aber an dessen Stelle ein anderes kleineres gesetzet werden muß, welches vorzüglich dann allemal statt hat, wenn die nach dem ersten folgenden Ziffern des Divisors große Zahlzeichen sind. z. B.

2' 1' 0' 1 4 6 4 { 4 2 3
4 9 6 8
1 9 8 7 2

1' 1' 4' 2 6
4 9 6 8
9 9 3 6

1 4 9 0 4
4 9 6 8
1 4 9 0 4

Beweis:

Da man alle Theile des Dividends, durch den ganzen Divisor dividirt, so ist die Summe der Partialquotienten der gesuchte Quotient des ganzen Dividends und Divisors (§. 46.).

1 Zusatz: Wenn man dem Producte des in ganzen Zahlen gefundenen Quotienten und des Divisors den Rest, der während der Operation, oder am Ende bleibt, addirt, so giebt die Summe den Dividend; denn wenn D den jedesmaligen Dividend, d den Divisor, q den in ganzen Zahlen bis dahin gefundenen Quotienten,

und r so einen treffenden Rest bezeichnen; so ist vermög der angestellten Operation allemal

$$r = D - d\,q,$$

$$d\,q + r = D \text{ (§. 29. I Zus.)}.$$

II Zusatz: Der bleibende Rest muß allemal kleiner als der Divisor seyn; denn $d\,q + r = D$, würde nun $r = d$ seyn; so wäre $d\,q + d = D$; oder $D = d\,(q + 1)$ folglich würde $q + 1$, nicht aber q der wahre Quotient seyn, welches um so mehr gilt, wenn man $r > d$ fände.

III Zusatz: Bleibt bey der Division ganzer Zahlen ein Rest, so giebt es keine ganze Zahl, die mit dem Divisor multiplicirt den Dividend wieder giebt. Von diesen mehr in der Lehre von Brüchen.

Anmerk. Wer Nepersche Stäbchen besitzet, kann mechanisch gegebene ganze Zahlen miteinander multipliciren und dividiren.

§. 57.

Aufgabe:

Allgemein ausgedrückte Zahlen mit einander zu multipliciren.

Auflösung:

Man multiplicire die Coefficienten miteinander, und setze die Buchstaben ohne Zeichen zusamen. z. B.

$4\,a \times 3\,b = 12\,a\,b$ (§. 43. II Zus. §. 51.).

§. 58.

§. 58.

Aufgabe:

Gegebene Größen in der Buchstabenrechnung zu dividiren.

Auflösung:

Man dividire ihre Coefficienten, in Rücksicht der Buchstaben streiche man gleiche Factoren im Divisor und Dividend aus, und setze den Rest unverändert in den Quotienten. z. B. $6ab : 3ac = 2b : c$ (§. 51. II u. III Zus.)

§. 59.

Lehrsatz:

Wenn man was immer für eine Größe mit einer positiven Zahl multiplicirt, so hat das Product mit dem Multiplicand einerley Zeichen. d. i.

$+a \times +4 = +4a$
$-a \times +4 = -4a$
} und allgemein: $+a \times +n = +na$, $-a \times +n = -na$

Beweis:

Multipliciren heißt den Multiplicand so und so oft nehmen, als es der Multiplicator angiebt, (§. 43.) ersteres ist durch das Zeichen, letzteres durch die Größe des Multiplicators bestimmt, nun bestimmt aber das positive Zeichen (+), daß man den Multiplicand als eine zuaddirende Größe nehmen, daß ist den Multiplicand selbst, und zwar so oft nehmen soll, als es die Zahl 4 oder überhaupt n angiebt; das ist

+a

$+a \times +4 = +a+a+a+a = +4a$

$-a \times +4 = -a-a-a-a = -4a$ (§. 36.)

Und da es hier nur auf das Zeichen ankömt, auf welche die Größe des Multiplicators keinen Einfluß hat, so ist überhaupt $+a \times +n = +na$; $-a \times +n = -na$.

§. 60.

Lehrsatz:

Wenn man eine Größe mit einer negativen Zahl multiplicirt, so bekömt das Product das entgegengesetzte Zeichen vom Multiplicand. d. i.

$+a \times -4 = -4a$ (und all: $+a \times -n = -na$

$-a \times -4 = +4a$ (gemein: $-a \times -n = +na$

Beweis:

Mit einer negativen Zahl multipliciren (§. 43.) heißt den Multiplicand als eine zusubtrahierende Größe, das ist, das Gegentheil des Multiplicandus, so oft nehmen, als es die Größe des Multiplicators angiebt; (§. 35. VII u. VIII Zus.)

$+a \times -4 = -a-a-a-a = -4a$

$-a \times -4 = +a+a+a+a = +4a$ (§. 36.)

Da wieder die Größe n des Multiplicators auf die Zeichenbestimmung keinem Einfluß hat, so ist überhaupt $+a \times -n = -na$; und $-a \times -n = +na$.

Zusatz:

Wenn bey der Multiplication die Factoren Zeichen bey sich haben, so geben gleiche Zeichen der Factoren im im Producte (+), ungleiche (−)

§. 61.

Lehrsatz:

Wenn man eine Größe durch eine positive Zahl dividirt, so bekömt der Quotient das Zeichen des Dividends d. i.

$+6a:+2=+3a$] allgemein $+a:+n=+(a:n)$
$-6a:+2=-3a$] $-a:+n=-(a:n)$

Beweis:

Allemal giebt der Quotient mit dem Divisor multiplicirt dem Dividend wieder (§. 43. b); denn

$+3a \times +2 = +6a$ [(§. 59.)
$-3a \times +2 = -6a$ [

Eben so ist $+(a:n) \times +n = +(a:n) \times n = a$
Und $-(a:n) \times +n = -(a:n) \times n = a$
(§. 50. I. u. 59.)

§. 62.

Lehrsatz:

Wenn man eine Größe durch eine negative Zahl dividirt, so bekömt der Quotient das entgegengesetzte Zeichen vom Dividend. d. i.:

$+6a:-2=-3a$ [allgemein $+a:-n=-(a:n)$
$-6a:-2=+3a$ [$-a:-n=+(a:n)$

Beweis:

Das Product des Quotienten und des Divisors giebt wieder den Dividend (§. 43. b) denn

$-3a \times -2 = +6a$; und $+3a \times -2 = -6a$

Eben so $-(a:n) \times -n = +(a:n) \times n = +a$

$+(a:n) \times -n = -(a:n) \times n = -a$

(§. 60. u. 50. I)

Zusatz:

Zusatz:

Bey der Division geben gleiche Zeichen im Dividend und Divisor im Quotienten (+) ungleiche (—).

§. 63.

Aufgabe:

Zusammengesetzte Größen in der Buchstabenrechnung zu multipliciren.

Auflösung:

1. Man multiplicire mit jedem Theile des Multiplicators alle Theile des Multiplicands,

2. bestimme die Zeichen aus (§. 60. Zus.) und die einzelnen Producte aus (§. 57.),

3. addire die einzelnen Producte zusammen. z. B.

$$\begin{array}{r} +3a-2b \\ \underline{+4c-d} \\ +12ac-8bc-3ad+2bd \end{array}$$

§. 64.

Aufgabe:

Zusammengesetzte Größen in der Buchstabenrechnung zu dividiren.

Auflösung:

1. Man dividire mit dem Divisor alle Theile des Dividends,

2. bey den einzelnen Quotienten bestimme man die Zeichen aus (§. 62. Zus.), ihre Größe aus (§. 58.),

3. die-

3. diese einzelne Quotienten addire man am Ende zusammen. z. B.

$$15ad - 9bd + 15cd - 20ae + 12be - 20ce \;[\; 3d - 4e$$
$$:(5a - 3b + 5c)$$
$$15ad - 9bd + 15cd$$
$$- \quad + \quad -$$

$$-20ae + 12be - 20ce$$
$$(5a - 3b + 5c)$$
$$-20ae + 12be - 20ce$$
$$+ \quad - \quad +$$

Anmerk. Mehrere Beyspiele zur Uebung für die Buchstabenrechnung mit zusammengesetzten Größen lassen sich erst nach der Lehre von Brüchen und Potenzen schicklich anführen.

IV Abschnitt.

Von der Theilbarkeit ganzer Zahlen.

§. 65.

Erklärungen:

a Wenn sich eine ganze Zahl A durch eine andre B ohne Rest theilen läßt, das ist, eine ganze Zahl n ohne Rest zum Quotienten giebt, so sagt man, A sey durch B **theilbar**; und weil $n \times B = B \times n$ (§. 45. I Zus.) = A (43.) so giebt B selbst n mal genohmen die Zahl A, das ist, B ist das **Maaß** (§. 1. d) oder ein **aliquoter Theil** von A.

A. z. B. da 12 : 3 = 4, so ist die Zahl 3 das Maaß von der Zahl 12.

b Lassen sich zwey Zahlen A und C zugleich durch die nemliche Zahl B ohne Rest theilen, so ist B das gemeine Maaß für A und C; z. B. 4 ist das gemeine Maaß der Zahlen 8 und 12.

Zusatz:

Jede Zahl ist durch sich selbst, und durch 1 theilbar (§. 43. III u. IV Zus.)

§. 66.

Erklärungen:

a Eine Zahl, die blos durch sich selbst, und durch 1 theilbar ist, heißt eine einfache oder eine Primzahl (numerus primus) z. B. die Zahlen 2, 3, 5, 7, 11, 13 u. s. f.

b Eine Zahl, die durch eine oder mehrere andere Theilbar ist, heißt eine zusammengesetzte Zahl (numerus compositus) z. B. die Zahlen 2, 4, 6, 8 u. s. f.

c Zahlen, die kein gemeines Maaß haben, nennet man relative Primzahlen, oder Primzahlen unter sich, z. B. 4, 15.

d Zahlen die ein gemeines Maaß haben, heissen zusammengesetzte Zahlen unter sich; z. B. 4, 6, 8 u. s. f.

I Zusatz: Absolute, oder einfache Primzahlen, sind auch unter sich Primzahlen; aber nicht umgekehrt.

II Zusatz:

II Zusatz: Zusammengesetzte Zahlen unter sich sind auch an sich zusammengesetzte Zahlen.

III Zusatz: Wenn A durch B theilbar ist, so ist auch, wenn m eine ganze Zahl bezeichnet, m A durch B noch theilbar (§. 51. II Zus.) z. B. da 8 durch 4 theilbar, so bleibt auch $3 \times 8 = 24$ durch 4 noch theilbar.

§. 67.

Lehrsatz:

Wenn zwey Zahlen A und B das gemeine Maaß m haben, so ist ihr Product durch jeden Factor noch theilbar, wenn man aus selben m einmal wegläßt, das ist: wenn man A sowohl als B mit m dividirt, und die Quotienten P und Q mit dem Maaß m multiplicirt, so ist dieses Product durch A sowohl als B theilbar.

Beweis:

Es sey $A : m = P$; also $A = m\,P$

$B : m = Q$; $B = m\,Q$

$A.B = m\,P.\,m\,Q$

so ist offenbar $m\,P\,Q = A\,Q = B\,P$ durch A sowohl als B theilbar. (§. 66. III Zus.)

Z. B. 16 und 24 haben das gemeine Maaß 8; d. i. $16 : 8 = 2$ und $24 : 8 = 3$, mithin ist das Product des gemeinen Maaßes in die beyden Quotienten oder $8 \times 2 \times 3 = 48$ sowohl durch die Zahl 16 als 24 theilbar.

I Zusatz:

I Zusatz: Wenn mehrere Zahlen A, B, C u. s. w. alle das gemeine Maaß m haben, so daß A : m = P, B : m = Q, C : m = R u. s. w. so ist das Product des Maaßes in alle Quotienten durch jede der obigen Zahlen theilbar, das ist: m P Q R ist durch A, B, und C theilbar.

II Zusatz: Wenn die Quotienten wieder alle oder einige aus ihnen das gemeine Maaß n haben, so daß z. B. P : n = S, Q : n = T : hingegen n kein Maaß von R sey; so ist wieder das Product der beyden Maaße m, n in die Quotienten S, T und den vorigen R durch alle Zahlen theilbar, d. i.: m n R T S ist durch A, B, und C theilbar.

III Zusatz: Allgemein, wenn man mehrere Zahlen durch ihr gemeines Maaß dividirt, und eben so bey den Quotienten verfährt, so ist das Product aller gebrauchten Maaße in alle zuletzt gefundene Quotienten und jene Größen die kein gemeines Maaß haben, durch jede der gegebenen Zahlen theilbar.

§. 68.

Lehrsatz:

Das gemeine Maaß des Divisors und des bleibenden Restes, ist auch ein Maaß des Dividends.

Beweis:

1. Man bezeichne den Dividend mit A, die kleinere Zahl, oder den Divisor mit B, den in ganzen Zahlen gefundenen Quotienten mit a, und den Rest mit C so ist

2. $A = a\,B + C$ (§. 56. I Zus.)

3. Nun sey m das gemeine Maaß für B und C, so ist auch a B durch m theilbar (§. 66. III Zus.) folglich

4. sind A B : m und C : m ganze Zahlen, mithin auch ihre Summe, das ist, A : m; mithin A durch m ebenfalls theilbar.

§. 69.

Lehrsatz:

Das Maaß des Dividends und des Divisors ist auch das Maaß des Restes.

Beweis:

1. Man bezeichne die Zahlen wie im vorigen §. so ist wieder $A = a\,B + C$, mithin auch $A : m = a\,B : m + C : m$ (§. 44. N. 1.)

2. Ist nun aber m das Maaß von A, so muß A : m eine ganze Zahl, mithin a B : m + C : m ebenfalls eine ganze Zahl seyn.

3. Die Summe letzterer zwey Quotienten kann nur eine ganze Zahl seyn, wenn beyde Quotienten ganze Zahlen, oder beyde Brüche sind;

4. Da nun m das Maaß von B, mithin auch von a B ist (§. 66. III Zus.); so giebt a B : m eine ganze Zahl; folglich

5. muß auch C : m eine ganze Zahl, mithin m das Maaß vom Reste C seyn.

§. 70.

Erklärungen:

a Wenn eine Zahl eine andere so dividirt, daß der Quotient eine Primzahl ist, so heißt erstere ganze Zahl das **größte Maaß** der letztern; z. B. für 15 ist 5 das größte Maaß, denn 15 : 5 = 3

b Eine Zahl, die zwey oder mehrere gegebene Zahlen so theilet, daß die Quotienten Primzahlen unter sich sind, heißt das **größte gemeine Maaß** dieser Zahlen; z. B. für 24 und 16 ist die Zahl 8 das größte gemeine Maaß, denn 24 : 8 = 3, und 16 : 8 = 2, ferner für 60 und 32 die Zahl 4, denn 60 : 4 = 15; 32 : 4 = 8, wo die Quotienten 15 u. 8 Primzahlen unter sich sind, so wie die vorigen 3 und 2 (§. 66. I Zus.)

I Zusatz: Wenn von zweyen ungleichen Zahlen A > B ist, und wenn A durch B theilbar ist, so ist B das größte gemeine Maaß beyder Zahlen.

II Zusatz: Wenn A durch B ohne Rest nicht theilbar ist, so kann das gemeine Maaß nicht größer als der Rest z. B. C seyn. (§. 69.)

III Zusatz: Wenn der Rest C die kleinere Zahl B theilet, so ist C das größte gemeine Maaß der beyden Zahlen A, B. (§. 68.).

§. 71.

Aufgabe;

Für zwey gegebene ganze Zahlen A und B das größte gemeine Maaß suchen.

Auf-

Auflösung:

1. Man theile die größere A durch die kleinere B; ist nun B in A ohne Rest enthalten, so ist B das gesuchte Maaß. (§. 70. I Zus.).
2. Ist aber A durch B nicht theilbar, so dividire man den Divisor B durch den Rest C; ist nun B durch C theilbar, so ist C das größte gemeine Maaß für die Zahlen A und B. (§. 70. III Zus.).
3. Giebt aber B : C wieder einen Rest D, so theile man den vorigen Rest C durch den neuen D, und wenn C durch D theilbar ist, so ist D das größte gemeine Maaß für C und B (§. 70. III Zus.), folglich auch für A.
4. Dieses Verfahren setze man so lange fort, bis man auf einen Rest kömt, der den vorgehenden ohne neuen Rest theilet, dieser Rest nun ist das größte gemeine Maaß aller vorhergehenden Reste, folglich auch der gesuchten Zahlen (§. 68. u. 70. III Zus.).
5. Kömt man bey diesem Verfahren auf einen Rest = 1 so zeigt dieser an, das die gegebenen Zahlen A. B kein gemeines Maaß haben; folglich Primzahlen unter sich sind. (§. 66.)

Beyspiel:

Man suche das größte gemeine Maaß für die Zahlen 1155 und 360.

	a		b
A = 1155	[3	B = 360	[4
B = : 360		C = 75	
1080		300	
C = 75		D = 60	
		C =	

	c		d
C = 75	1	D = 60	4
D = 60		E = 15	
E = 15		60	

folglich ist der Rest E = 15 das gesuchte größte gemeine Maaß für die Zahlen A = 1155, und B = 360; denn 1155 : 15 = 77; 360 : 15 = 24, welches Primzahlen unter sich sind.

Anmerk. Um in der Ausübung schnell zu überschauen, ob, und durch welche der ersten zehn Zahlen eine gegebene ganze Zahl theilbar sey, lassen sich sehr bequeme Regeln entwickeln.

1. Jede gegebene Zahl besteht immer nur aus den gewöhnlichen zehn Ziffern (24).

2. Drückt man den natürlichen Werth der Ziffern am Einer Platz durch a, an der nächsthöhern Stelle durch b und so an den folgenden durch c, d, e u. s. f.,

3. den localwerth aber durch die beygesetzten Factoren 10, 100, 1000 u. s. w. aus: so ist

4, a + 10 b + 100 c + 1000 d, 10000 e u. s. f. ein allgemeiner Ausdruck für jede mögliche ganze Zahl, wo man durch die Verschiedenheit der Buchstaben zugleich die Stelle wahrnimmt, die dem Ziffer bey der gegebenen Zahl zukömt, z. B. c drückt das Ziffer an der dritten Stelle, aber ohne Localwerth, aus.

5. Dividirt man nun diesen allgemeinen Ausdruck nacheinander der Ordnung nach durch alle Zah-

len von 2 bis zehn, läßt dabey die Quotienten weg, und setzet die bleibende Reste nebeneinander in einer horizontalen Reihe, so erhält man folgende Tabelle.

	‖ :	a + 10 b + 100 c + 1000 d + 10000 e + ...
I	‖ 2	a
II	‖ 3	a + b + c + d + e + ...
III	‖ 4	a + 2 b
IV	‖ 5	a
V	‖ 6	a + 4 b + 4 c + 4 d + 4 e + ...
VI	‖ 7	a + 3 b + 2 c + 6 d + 4 e + ...
VII	‖ 8	a + 2 b + 4 c
VIII	‖ 9	a + b + c + d + e + .. .
IX	‖ 10	a

Aus dieser Tabelle entspringen folgende Regeln:

A Wenn das letzte, oder niedrigste Ziffer einer gegebenen Zahl durch 2, 5, oder 10 (im letzten Falle muß das niedrigste Ziffer a = 0 seyn) theilbar ist, so ist die ganze Zahl durch 2, 5, oder 10 theilbar. (I, IV, IX Tab.) z. B. 468 ist durch 2; 465 durch 5; und 460 durch 10 theilbar.

B Läßt sich die Summe des niedrigsten, und des doppelten folgenden Ziffers durch 4 theilen, so ist die ganze gegebene Zahl durch 4 theilbar. z. B. 628 ist durch 4 theilbar, weil 8 + 4 = 12 durch 4 theilbar ist. (Tab. III)

C Addirt man alle Ziffern, ohne ihren Localwerth in Betracht zu ziehen, zusammen, und läßt sich die

Sum-

Summe durch 3 oder 9 theilen, so läßt sich die ganze gegebene Zahl durch 3 und 9 theilen, z. B. 3654 läßt sich sowohl durch 3 als 9 theilen, weil 4 + 5 + 6 + 3 = 18 durch beyde theilbar ist (Tab. II VIII).

D Addirt man das einfache niedrigste, das doppelte nächsthöhere, und das vierfache darauf folgende Ziffer zusammen, so ist die ganze gegebene Zahl durch 8 Theilbar, wenn es obige Summe ist. z. B. 52488 ist durch 8 theilbar; denn 8 + 16 + 16 = = 40 läßt sich durch 8 theilen. (Tab. VII)

Aus Nr. V und VI läßt sich keine für die Anwendung bequeme folglich brauchbare Regel angeben.

§. 72.

Erklärungen:

a Eine Zahl, die durch 2 theilbar ist, heißt eine gerade (numerus par),

b die nicht durch 2 theilbar ist, eine ungerade Zahl numerus impar).

I Zusatz: Wenn m und n ganze Zahlen bezeichnen, so läßt sich jede gerade Zahl durch 2 m, oder 2 n; und jede ungerade durch 2 m + 1; 2 n + 1 oder auch durch 2 m — 1, und 2 n — 1 ausdrücken.

II Zusatz: Die Summe sowohl als die Differenz zweyer gerader Zahlen ist gerade; denn

2 n + 2 m = 2 (n + m), und 2 n — 2 m = 2 (n — m) jede durch 2 theilbar (§. 51. II Zus.) z. B. 8 + 6 = 14, und 8 — 6 = 2.

III Zusatz; Die Summe sowohl als die Differenz zweyer ungeraden Zahlen ist eine gerade Zahl; denn

$(2n+1)+(2m+1)=2n+2m+2=2(n+m+1)$ und

$(2n+1)-(2m+1)=2n-2m=2(n-m)$ jede also durch 2 theilbar. z. B. $7+5=12$; $7-5=2$

IV Zusatz: Die Summe sowohl, als die Differenz einer geraden und ungeraden Zahl ist ungerad. Denn

$2n+(2m+1)=2n+2m+1=2(n+m)+1$

$2n-(2m+1)=2n-2m-1=2(n-m)-1$

$(2n+1)-2m=2n-2m+1=2(n-m)+1$

wo offenbar keine durch 2 theilbar ist. z. B. $7+8=15$; $15-6=9$; $10-7=3$.

V Zusatz: Das Product zweyer gerader, oder auch einer geraden in eine ungerade Zahl, ist gerade; denn

$2n \times 2m = 4nm$

$(2n+1) \times 2m = 4mn+2m$, jede wieder durch 2 theilbar. z. B. $4 \times 8 = 32$; $3 \times 8 = 24$;

VI Zusatz: Das Product zweyer ungerader Zahlen ist wieder eine ungerade Zahl.

Denn $(2m+1) \times (2n+1) = 4mn+2n+2m+1 =$

$2\,2mn+n+m)+1$ welches durch 2 nicht theilbar ist. z. B. $7 \times 9 = 63$.

II Haupt=

II Hauptstück.

Von gebrochenen Zahlen.

I Abschnitt.

Von der Beschaffenheit der Brüche überhaupt, und ihrer Bezeichnungsart.

§. 73.

Erklärungen:

a Ein oder mehrere Theile eines Ganzen A nennet man im Verhältniß zu diesem Ganzen A einen **Bruch**, oder in wiefern man nur auf die Größe und Anzahl der Theile sieht, eine **gebrochene Zahl** (§. 21.).

b Jene Zahl, welche die Anzahl der Theile des Ganzen angiebt, heißt der Nenner (Denominator); jene Zahl hingegen, welche die Anzahl der gegebenen Theile angiebt, heißt der **Zähler des Bruches** (Numerator).

c Einen Bruch bezeichnet man dadurch, daß man den Nenner unter den Zähler, und zwischen sie einen Strich setzet. z. B. $\frac{3}{4}$ zeiget an, daß das Ganze aus 4 Theilen bestehe, von welchen 3 gegeben sind.

I Zusatz: $\frac{a}{b}$ einer Größe A zeiget also an, daß man die zusammengesetzte Größe A in b Theile zerfallen, und so einen Theil, das ist, den Quotienten a mal

neh-

nehmen soll, das ist: $\frac{a}{b}$ A = (A : b) × a. z. B. $\frac{3}{5}$ fl. drückt aus, daß man den Gulden in 5 Theile theilen, und einen Zwölfer nach unserer Münze, dreymal nehmen soll.

II Zusatz: Bey Brüchen wird die Größe A als ein Ganzes, mithin als eine Einheit höherer Art (§. 20.) genommen, und läßt sich also als Größe durch 1 ausdrücken, mithin bey gebrochenen Zahlen ist $\frac{a}{b}$ = (1 : b) × a.

§. 74.

Lehrsatz:

Bey jedem Bruche läßt sich der Zähler als Dividend der Nenner als Divisor, und der Bruch selbst als der Quotient betrachten; oder $\frac{a}{b}$ = a : b

Beweis:

$\frac{a}{b}$ = (1 : b) × a (73. II Zus.)

= a : b (§. 50.)

I Zusatz; Es ist gleich viel, ob man zwischen den Zähler und Neuner das Divisionszeichen, oder das Bruchzeichen schreibt.

II Zusatz: Bey Brüchen, die gleiche Nenner haben, verhält sich ihre Größe, wie jene ihrer Zähler, z. B. $\frac{4}{5} > \frac{2}{5}$, denn da in beyden das Ganze in gleich viele Theile getheilet wird, so enthält offenbar der erste Bruch mehrere solche Theile als der Zweyte, und ist daher größer als der Zweyte.

III Zusatz: Bey Brüchen von gleichen Zählern ist jener Bruch größer der den kleinern Nenner hat. z. B.

$\frac{4}{5} >$

$\frac{4}{5} > \frac{4}{7}$; denn im erstern Bruche werden die Theile gröſser, weil man das Ganze in wenigere Theile theilet, und man eben so viele solche Gröſsere Theile nimmt, als im zweyten Bruche kleinere.

IV Zusatz: Ein Bruch ist um so viel gröſser, je gröſser sein Zähler, und je kleiner dessen Nenner ist.

V Zusatz: Ein Bruch wird mit einer ganzen Zahl multiplicirt, wenn man mit selber entweder den Zähler multiplicirt, oder den Nenner dividirt. d. i.:

$\frac{3}{4} \times 2 = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$; und überhaupt $\frac{a}{nc} \times n = \frac{na}{nc} = \frac{a}{c}$ (§ 50.)

VI Zusatz: Ein Bruch wird mit einer ganzen Zahl dividirt, wenn man mit der ganzen Zahl entweder den Zähler dividirt, oder den Nenner multiplicirt. d. i.

$\frac{6}{7} : 2 = \frac{3}{7} = \frac{6}{14}$; überh. $\frac{nc}{a} : n = \frac{c}{a} = \frac{nc}{na}$ (§. 50)

VII Zusatz: Ein Bruch bleibt unverändert, wenn man den Zähler sowohl als den Nenner mit der nemlichen Zahl multiplicirt, oder dividirt. d. i.

$\frac{3}{4} = \frac{6}{8}$; $\frac{5}{15} = \frac{1}{3}$; überh. $\frac{a}{c} = \frac{na}{nc}$; und $\frac{mb}{mc} = \frac{b}{c}$

(§. 50 Zus.)

§. 75.

Erklärungen:

a Ein Bruch, dessen Zähler kleiner, als der Nenner ist, heiſst ein **eigentlicher Bruch** (Fractio vera.)

b Ist hingegen der Zähler gröſser als der Nenner, ein **uneigentlicher**, oder **unächter Bruch** (Fractio spuria.)

Zusatz:

Zusatz:

Jede ganze Zahl a läßt sich bruchartig ausdrücken, oder in einen unächten Bruch verwandeln; denn

$$a = a : 1 \text{ (§. 43. III Zus.)} = \frac{a}{1} \text{ (§. 74.)}$$

§. 76.

Erklärungen:

a Einen Bruch auf eine kleinere Benennung bringen heißt solchen in einen gleichen Bruch ververwandeln, dessen Zähler und Nenner kleinere Zahlen sind, —

b Einen gegebenen Bruch auf die kleinste Benennung bringen heißt ihn in einen gleichen verwandeln, dessen Zähler und Nenner Primzahlen unter sich sind.

§. 77.

Aufgabe:

Einen gegebeuen Bruch auf eine kleinere Benennung zu bringen. z. B. $\frac{36}{54}$.

Auflösung:

Man dividire den Zähler und Nenner, wenn sie nicht Primzahlen unter sich sind, mit ihrem gemeinen Maaße (§. 65.), so ist der neue Bruch der verlangte, z. B. $\frac{36}{54} = \frac{36}{54} : \frac{9}{9} = \frac{4}{6}$ ((§. 74. VII Zus.)

§. 78.

§. 78.

Aufgabe:

Einen gegebenen Bruch auf die kleinste Benennung zu bringen. z. B. $\frac{42}{56}$.

Auflösung:

1. Man suche das größte gemeine Maaß für den Nenner und Zähler des gegebenen Bruches. (§. 71.)
2. Durch dieses Maaß dividire man den Zähler und Nenner, so geben die Quotienten den Zähler und Nenner des gesuchten Bruches. z. B. $\frac{42}{56} = \frac{42}{56} : \frac{14}{14} = \frac{3}{4}$.

Beweis:

Durch die Division mit dem größten gemeinen Maaße bleibt der Werth des Bruches unverändert, (§. 74. VII Zus.), und der Zähler und Nenner sind Primzahlen unter sich in dem neuen Bruche (§. 71.)

Anmerkung:

In der Ausübung leisten zur Auflösung beyder Aufgaben §. 77 und 78. die in der Anmerkung §. 71. angegebenen Regeln sehr gute Dienste.

§. 79.

Erklärung:

Zwey oder mehrere gegebene Brüche **unter einerley Benennung** bringen heißt sie in gleiche Brüche verwandeln, die alle einerley Nenner haben.

§. 80.

§. 80.

Aufgabe:

Mehrere gegebene Brüche unter einerley Benennung zu bringen.

z. B. $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{5}$, oder überhaupt $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$

Auflösung:

1. Man multiplicire jeden Zähler in alle Nenner der übrigen Brüche, nur in den seinen nicht, und nehme diese Producte für die Zähler,

2. multiplicire nun auch alle Nenner, und nehme dieses Product für den gemeinschaftlichen Nenner. z. B.

$\frac{3}{4} = \frac{15}{20}$; $\frac{2}{5} = \frac{8}{20}$; $\frac{a}{b} = \frac{ad}{bd}$; $\frac{c}{d} = \frac{bc}{bd}$

Beweis:

Durch dieses Verfahren wird bey jedem Bruche der Zähler so wohl, als der Nenner mit dem Produkte der Nenner aller übrigen Brüche, mithin beyde mit der nemlichen Zahl multiplicirt, folglich sind die neuen Brüche den vorigen gleich. (§. 74. VII Zus.)

Zusatz:

Jede Zahl, die durch alle einzelne Nenner theilbar ist, kann man für den gemeinschaftlichen oder General-Nenner annehmen, wenn man sie durch den Nenner des ersten Bruches dividirt, und mit den Quotienten dessen Zähler multiplicirt, und so bey allen übrigen Brüchen verfährt (§. 74. VII Zus.). z. B.

für

für die Brüche $\frac{7}{12}$, $\frac{3}{8}$ kann die Zahl 24 gebraucht werden, weil sie durch beyde Nenner theilbar ist, und 24 : 12 = 2; mithin $\frac{7}{12} = \frac{14}{24}$; 24 : 8 = 3; mithin $\frac{3}{8} = \frac{9}{24}$ ist.

§. 81.

Aufgabe:

Zwey oder mehrere gegebene Brüche auf einerley, und zugleich kleinste Benennung zu bringen.

Auflösung:

1. Man schreibe alle Nenner der gegebenen Brüche in einer horizontalen Reihe neben einander hin, und dividire sie durch ihr gemeines Maaß; ziehe einen horizontalen Strich, und setze unter selben die Quotienten.
2. Im Falle nicht alle Nenner durch einerley Zahl theilbar sind, so dividire man mit jenem Maaße, das den meisten gemein ist, und setze jene Nenner, die sich nicht damit theilen lassen, unverändert an die Stelle des Quotienten.
3. Lassen sich alle, oder einige dieser Quotienten durch eine Zahl theilen, so dividire man wieder, und schreibe die neuen Quotienten, so wie jene, die sich nicht theilen lassen, unter einem Strich, den man zieht;
4. Auf diese Art fahre man so lange fort, so lange noch einige Quotienten ein gemeines Maaß haben.
5. Nun multiplicire man alle zu letzt herausgebrachte Quotienten mit allen gebrauchten Maaßen, so ist

das

das Produkt der gesuchte **gemeinschaftliche**, oder **Generalnenner.**

6. Jetzt setze man in einer senkrechten Reihe alle gegebene Brüche unter einander, ziehe zur rechten Seite einen senkrechten Strich, und mache dadurch eine neue Spalte.

7. Oben in dieser Spalte schreibe man den gefundenen Generalnenner, dividire solchen durch alle Specialnenner der gegebenen Brüche, und trage die Quotienten in eben diese Spalte den Nennern zur Seite, ziehe abermal zur Rechten einen senkrechten Strich, so erhält man die dritte Spalte;

8. Nun multiplicire man den Zähler eines jeden Bruches mit dem entsprechenden Quotienten seines Nenners in den Generalnenner, und setze die Produkte in die dritte Spalte den Quotienten zur Seite, so sind diese die neuen Zähler;

9. Endlich schreibe man unter diese Zähler den Nro. 5. gefundenen Generalnenner, so sind alle Brüche auf einerley und zwar die kleinste Benennung gebracht.

Beweis:

Da die N. 5. gefundene Zahl ein Produkt aller Quotienten in alle gebrauchte Maaße und also durch jeden Specialnenner theilbar ist (§. 67. III Zus.), so ist sie der Generalnenner (§. 80. Zus.); und weil nach N. 4. keine Quotienten mehr ein gemeines Maaß haben, so ist sie der kleinste gemeinschaftliche

liche Nenner; durch das Verfahren N. 7 und 8. erhält man die entsprechenden Zähler (§. 80. Zus.), folglich wird dadurch die ganze Aufgabe aufgelöset.

Beyspiel:

Man soll $\frac{3}{8}$, $\frac{7}{12}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{2}{9}$, $\frac{4}{5}$ auf die kleinste gemeinschaftliche Benennung bringen.

Nro. 1. 2. 8, 12, 6, 9, 5

(4) 2, 3, 6, 9, 5

Nro. 3. (2) 1, 3, 3, 9, 5

(3) 1, 1, 1, 3, 5

Mithin ist $3 \times 5 \times 3 \times 2 \times 4 = 360$ der gesuchte Generalnenner. Nro 5.

(360)

Nro. 6 — 8.

$\frac{3}{8}$	45	135
$\frac{7}{12}$	30	210
$\frac{5}{6}$	60	300
$\frac{2}{9}$	40	80
$\frac{4}{5}$	72	288

mithin Nro. 9. $\frac{3}{8} = \frac{135}{360}$

$\frac{7}{12} = \frac{210}{360}$

$\frac{5}{6} = \frac{300}{360}$

$\frac{2}{9} = \frac{80}{360}$

$\frac{4}{5} = \frac{288}{360}$

II. Abschnitt.

Von den vier Rechnungsarten mit Brüchen überhaupt.

§. 82.

Aufgabe:
Gegebene Brüche zu addiren.

Auflösung:

Auflösung:

1. Haben sie gleiche Nenner, so addire man ihre Zähler, und setze unter die Summe den unveränderten Nenner; oder

$\frac{3}{8} + \frac{2}{8} = \frac{5}{8}$; und überhaupt: $\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$

2. Haben sie ungleiche Nenner, so bringe man sie nach (§. 80 oder 81.) unter einerley Benennung, und addire wieder ihre Zähler; oder

$\frac{3}{4} + \frac{6}{7} = \frac{21}{28} + \frac{24}{28} = \frac{45}{28}$; überh. $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$

Beweis:

Der neue Bruch enthält so viele gleichartige Theile vom Ganzen, als beyde Brüche zusammen genommen, folglich enthält er die verlangte Summe (§. 29.)

§. 83.

Aufgabe:

Von einem größern Bruch einen kleinern abzuziehen.

Auflösung:

1. Haben die Brüche gleiche Nenner, so ziehe man den kleinern Zähler vom größern ab, und setze unter den Rest den unveränderten Nenner; d. i.

$\frac{5}{8} - \frac{2}{8} = \frac{3}{8}$; allgemein $\frac{a}{b} - \frac{c}{b} = \frac{a-c}{b}$

2. Haben

2. Haben sie verschiedene Nenner, so bringe man sie wieder auf einerley Benennung (§. 80 und 81.) und subtrahire den kleinern Zähler; oder

$\frac{6}{7} - \frac{3}{4} = \frac{24}{28} - \frac{21}{28} = \frac{3}{28}$; allgemein: $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad - bc}{bd}$

Beweis:

Der neu gefundene Bruch gibt an, wie viele gleichartige Theile des Ganzen dem kleinern Bruche addirt werden müssen, um den größern zu erzeugen, mithin ist er die gesuchte Differenz. (§. 29.)

Zusatz:

Brüche werden zu ganzen Zahlen addirt, von ganzen Zahlen subtrahirt, wenn man die ganzen Zahlen bruchartig ausdrückt (§. 75. Zus.) und wie bey Brüchen verfährt.

§. 84.

Aufgabe:

Zwey gegebene Brüche miteinander zu multipliciren.

Auflösung:

Man multiplicire die Zähler und Nenner miteinander;

d. i. $\frac{3}{4} \times \frac{2}{5} = \frac{6}{20}$; allgemein, $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$

Beweis:

Einen Bruch mit einem Bruche multipliciren heißt den ersten in so viele Theile theilen, als der Nenner

des

des zweyten bestimmt; und solch einen Theil so vielmal nehmen, als der Zähler des zweyten Bruches angiebt, (§. 43 und §. 73. I Zus.) d. i: $\frac{3}{4} \times \frac{2}{5}$ heißt den 5ten Theil des Multiplicands $= \frac{3}{4}$: $5 = \frac{3}{20}$ (§. 74. VI Zusatz) zweymal nehmen $= \frac{6}{20}$ (§. 74 V Zus.) oder allgemein $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$

I Zusatz: Brüche werden mit ganzen Zahlen, und ganze Zahlen mit Brüchen nach (§. 74. V Zus.) multiplicirt.

II Zusatz: Bey Brüchen sowohl unter sich, als mit ganzen Zahlen geben die Factoren mit veränderter Ordnung einer bey Product; oder $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{c}{d} \times \frac{a}{b}$

III Zusatz: Ein Product zweyer Brüche wird durch eine ganze Zahl, oder einen Bruch multiplicirt, wenn man nur einen beliebigen Factor damit multiplicirt; d. i.
$(\frac{2}{3} \times \frac{4}{5}) \times 6 = \frac{12}{3} \times \frac{4}{5} = \frac{2}{3} \times \frac{24}{5}$;
allgemein: $(\frac{a}{b} \times \frac{c}{d}) \times n = n \frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times n \frac{c}{d}$
Eben so $(\frac{2}{3} \times \frac{4}{5}) \times \frac{6}{7} = \frac{12}{21} \times \frac{4}{5} = \frac{2}{3} \times \frac{24}{35}$
allgemein: $(\frac{a}{b} \times \frac{c}{d}) \times \frac{n}{m} = \frac{n\,a}{m\,b} \times \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{n\,c}{m\,d}$
$= \frac{n\,a}{b} \times \frac{c}{m\,d}$ (§. 51.)

IV Zusatz: Ein Bruch, oder eine ganze Zahl wird mit dem Producte zweyer Brüche multiplicirt, wenn man nur mit einem beliebigen Factor wirklich multiplicirt, und den andern unverändert beysetzt; d. i.
$4 \times (\frac{2}{3} \times \frac{5}{6}) = \frac{8}{3} \times \frac{5}{6} = \frac{2}{3} \times \frac{20}{6}$

allge=

allgemein: $n \times \left(\frac{a}{b} \times \frac{c}{d}\right) = n\,\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times n\frac{c}{d}$

Eben so $\frac{4}{7} \times \left(\frac{2}{3} \times \frac{5}{6}\right) = \frac{8}{21} \times \frac{5}{6} = \frac{2}{3} \times \frac{20}{42}$

Allgemein: $\frac{n}{m} \times \left(\frac{a}{b} \times \frac{c}{d}\right) = \frac{n\,a}{m\,b} \times \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{n\,c}{m\,d}$

$= \frac{n\,a}{b} \times \frac{c}{m\,d}$

§. 85.

Aufgabe:

Einen Bruch mit einem Bruch zu dividiren.

Auflösung:

Man multiplicire den Dividend mit dem umgekehrten Divisor; d. i;

$\frac{4}{5} : \frac{2}{3} = \frac{4}{5} \times \frac{3}{2} = \frac{12}{10}$; allgemein $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a\,d}{b\,c}$

Beweis:

$\frac{a\,d}{b\,c} \times \frac{c}{d} = \frac{a\,d\,c}{b\,c\,d} = \frac{a}{b}$ (§. 74. VII Zus. u. §. 43. b)

I Zusatz: Ein Bruch wird mit einer ganzen Zahl nach (§. 74. VI Zus.) dividirt.

II Zusatz: Eine ganze Zahl wird mit einem Bruche dividirt, wenn man den divisor umkehret und multiplicirt; d. i. $a : \frac{n}{m} = \frac{m\,a}{n}$; denn $\frac{m\,a}{n} \times \frac{n}{m} = \frac{n\,m\,a}{n\,m} = a$

III Zusatz: Ein Product zweyer Brüche wird mit einer ganzen Zahl, oder einem Bruche dividirt, wenn man nur einen beliebigen Factor damit dividirt;

$\left(\frac{8}{9} \times \frac{4}{5}\right) : 2 = \frac{4}{9} \times \frac{4}{5} = \frac{8}{9} \times \frac{2}{5}$

allgemein: $\left(\frac{a}{b} \times \frac{c}{d}\right) : n = \frac{a}{nb} \times \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{c}{nd}$

Eben so $\left(\frac{8}{9} \times \frac{4}{5}\right) : \frac{2}{3} = \frac{24}{18} \times \frac{4}{5} = \frac{8}{9} \times \frac{12}{10}$

allgemein: $\left(\frac{a}{b} \times \frac{c}{d}\right) : \frac{n}{m} = \frac{ma}{nb} \times \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{mc}{nd}$

IV Zusatz: Eine ganze Zahl, oder ein Bruch wird mit dem Producte zweyer Brüche dividirt, wenn man nur mit einem beliebigen Factor dividirt; d. i.

$$n : \left(\frac{a}{b} \times \frac{c}{d}\right) = \frac{nb}{a} : \frac{c}{d} = \frac{nd}{c} : \frac{a}{b}$$

$$\frac{n}{m} : \left(\frac{a}{b} \times \frac{c}{d}\right) = \frac{nb}{ma} : \frac{c}{d} = \frac{nd}{mc} : \frac{a}{b}$$

V Zusatz: Brüche, deren Zähler und Nenner selbst Brüche, oder aus ganzen und gebrochenen Zahlen zusammengesetzt sind, lassen sich auf einfache reduciren; d. i.

$$\frac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{6}} = \frac{3}{4} : \frac{5}{6} \text{ (§. 74.)} = \frac{18}{20},$$

$$\frac{3 + \frac{2}{5}}{4 - \frac{6}{7}} = (3 + \tfrac{2}{5}) : (4 - \tfrac{6}{7}) = \frac{17}{5} : \frac{22}{7} = \frac{119}{110}$$

§. 86.

Lehrsatz:

Wenn man zur halben Summe zweyer Grösen ihre halbe Differenz addirt, so bekömmt man die grösere, subtrahirt man die halbe Differenz von der halben Summe, so giebt der Rest die kleinere von den beyden Grösen.

Beweis:

Beweis:

Es sey die größere = a, die kleinere Größe = b so ist.

$\frac{1}{2}(a+b) = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b$ $\quad$ $\frac{1}{2}(a+b) = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b$

$\frac{1}{2}(a-b) = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b$ Und $\frac{1}{2}(a-b) = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b$

$- \quad +$

$\frac{1}{2}(a+b) + \frac{1}{2}(a-b) = a$ $\quad$ $\frac{1}{2}(a+b) - \frac{1}{2}(a-b) = b$

III Abschnitt.

Von den Decimalbrüchen insbesondere.

§. 87.

Erklärung:

Ein Bruch, dessen Nenner 1 mit angehängten Nullen ist, heißt ein zehentheiliger, oder Decimalbruch.

I Zusatz: Im Decimalsysteme, (§. 24.) so wie jedes Ziffer von Rechten zur Linken an jeder Stelle einen zehnmal größern Localwerth erhält, das ist, an den nächst höhern Platz Zehner, am folgenden Hunderte ausdrückt: so nimmt ihr Localwerth rückwärts von linken zur rechten Seite immer um das Zehenfache ab, so daß das nächste Ziffer nach den Einern Zehntheile, das folgende Hunderttheile u. s. w. ausdrückt.

II Zusatz; Setzet man nach den Einern ein Comma, damit ihre Stelle unverrückt bleibt, so kann bey Decimalbrüchen der Nenner ganz wegbleiben, wenn man im Zähler das Comma von der linken zur rechten Seite nach so viel Stellen oder Ziffern setzet, als der Nen-

ner Nullen enthält, und im Falle nicht so viele Ziffern vorhanden sind, selben Nullen vorsetzet; z. B. $\frac{3}{10} = 0,3$; $\frac{24}{10} = 2,4$; $\frac{28}{10000} = 0,0028$.

III Zusatz: Der Werth der Decimalbrüche bleibt unverändert, wenn man selben am Ende, oder im Anfange nach Belieben Nullen beyfüget, d. i. $0,2 = 0,200 = 00,2$. Denn da die Ziffern so lange das Comma an seiner Stelle bleibt, ihren Localwerth nicht ändern, so zeigen die letzten Ausdrücke nur, daß ausser 2 Zehntheile nichts vorhanden seye.

IV Zusatz: Ein Decimalbruch wird mit 10, 100 u. s. w. multiplicirt, wenn man das Comma um so viele Stellen rückwärts setzet, als die Zahl Nullen enthält. d. i. $0,3 \times 10 = 3$; $0,3 \times 100 = 30$. Denn um so viele Stellen, als man das Comma zurücksetzet, so viel zehnmal wird der Werth jedes Ziffers, mithin der ganze Bruch vermehret.

V Zusatz: Ein Decimalbruch wird durch 10, 100 u. s. w. dividirt, wenn man das Comma um so viele Stellen vorwärts rücket, als die Zahl Nullen enthält, z. B. $23,4 : 10 = 2,34$; $23,4 : 1000 = 0,0234$. Denn jedes Ziffer, mithin der ganze Bruch wird soviel zehnmal kleiner, als Stellen man das Comma vorwärtsrücket.

§. 88.

Aufgabe:

Gegebene Decimalbrüche zu addiren, oder zu subtrahiren.

Auflösung:

Auflösung:

Man setze die Brüche so untereinander, daß die Comma genau untereinander zu stehen kommen, addire und subtrahire sie wie ganze Zahlen, und setze in die Summe und den Resten das Comma wieder genau unter die vorigen Comma. z. B.

I
2 3, 9 8 1
0, 0 9 7
5, 2 7 1
Summe = 29, 3 4 9

II
5' 2', 0' 0 3
3 6, 9 8 2
Rest = 1 5, 0 2 1

Beweis:

Dadurch, daß die Comma untereinander gesetzet werden, so kommen immer gleichartige Zahlen untereinander zu stehen, und da man im ersten Falle alle einzelne Theile addirt, im zweyten voneinander subtrahirt, so erhält man die Summe und Differenz der ganzen Brüche.

§. 89.

Aufgabe:

Decimalbrüche miteinander zu multipliciren.

Auflösung:

Man multiplicire sie wie ganze Zahlen, und setze das Comma von Rechten zur Linken nach so viel Decimalstellen, als beyde Factoren zusammen enthalten. z. B.

2,325 × 4,23;

2 3 2 5
4 2 3
6 9 7 5
4 6 5 0
9 3 0 0
9,8 3 4 7 5

0,36 × 0,043

3 6
4 3
1 0 8
1 4 4
0, 0 1 5 4 8

Beweis:

Beweis:

Wenn man die gegebene Factoren auf den Ausdruck gewöhnlicher Brüche reducirt (§. 87. II Zus.) so besteht ihr Product aus dem Producte der Zähler und jenem der Nenner, (§. 84.) das ist aus einem Bruche dessen Zähler aus dem Producte der gegebenen Decimalbrüche als ganze Zahlen betrachtet, und der Nenner aus 1 mit so vielen Nullen besteht, als beyde Brüche zusammen Decimalstellen enthalten (§. 51. IV Zus.), will man also diesen Nenner weglassen, so muß man im Zähler so viele Decimalstellen abschneiden, als Nullen vorhanden sind, mithin die gegebene Factoren zusammen Decimalstellen enthalten. d. i.

$$2{,}325 \times 4{,}23 = \frac{2325}{1000} \times \frac{423}{100} = \frac{983475}{100000} = 9{,}83475$$
$$0{,}36 \times 0{,}043 = \frac{36}{100} \times \frac{43}{1000} = \frac{1548}{100000} = 0{,}01548.$$

§. 90.

Aufgabe:

Einen Decimalbruch durch einen andern zu dividiren.

I Wenn sie gleichviel Decimalstellen enthalten,

II Wenn der Divisor mehr Decimalstellen enthält als der Dividend,

III Wenn der Dividend mehr Decimalstellen als der Divisor enthält.

Auflösung:

Auflösung

des I Falles: Man dividire wie bey ganzen Zahlen; z. B. $0{,}24 : 0{,}08 = 24 : 8 = 3$

des II Falles: Man setze dem Dividend so viele Nullen bey, als der Divisor mehr Decimalstellen enthält, und verfahre wie im ersten Falle. z. B. $0{,}24 : 0{,}0008 = 2400 : 8 = 300$

des III Falles: Man dividire wie bey ganzen Zahlen, und setze im Quotienten das Comma nach so vielen Decimalstellen, als der Dividend mehr, als der Divisor enthält. z. B. $0{,}0024 : 0{,}8 = 0{,}003$.

Beweis:

Wenn man die gegebenen Decimalbrüche auf gemeine reducirt, so wird bey ihrer Division der Dividend mit dem umgekehrten Divisor multiplicirt (§. 85.), das ist; der Quotient wird ein Bruch, dessen Zähler ein Product aus dem Zähler des Dividends in den Nenner des Divisors und dessen Nenner ein Product aus dem Zähler des Divisors in den Nenner des Dividends ist;

Im I Falle heben sich die letzten Factoren im Zähler und Nenner gegeneinander auf, mithin besteht der Quotient aus dem Zähler des Dividends dividirt durch den Zähler des Divisors, oder aus dem Quotienten, wenn man die gegebenen Brüche als ganze Zahlen behandelt, d. i.

$$0{,}24 : 0{,}08 = \frac{24}{100} : \frac{8}{100} = \frac{24}{100} \times \frac{100}{8} = \frac{24}{8} \times \frac{100}{100} = \frac{24}{8} = 3$$

Im II Falle: Wenn man im Anfange dem Dividend so viele Nullen am Ende anhängt, bis er mit dem Divi-

for gleichviel Decimalstellen erhält, so wird sein Werth nicht verändert (§. 87. III Zus.); Nun ist alles wie im vorigen ersten Falle. d. i.

$$0{,}24 : 0{,}0008 = 0{,}2400 : 0{,}0008 = \frac{2400}{10000} : \frac{8}{10000}$$
$$= \frac{2400}{10000} \times \frac{10000}{8} = \frac{2400}{8} = 300.$$

Im III Falle bleiben vom letzten Factor des Nenners so viele Nullen nach 1, als der Dividend der gegebenen Brüche mehr Decimalstellen enthält, man muß also diesen Factor als Nenner unter den Quotienten der Zähler setzen, das ist, vom Quotienten so viele Decimalstellen abschneiden, als dieser Ueberschuß beträgt, oder:

$$0{,}0024 : 0{,}8 = \frac{24}{10000} : \frac{8}{10} = \frac{24}{8} \times \frac{10}{10000} = 3 \times \frac{1}{1000} = 0{,}003$$

§. 91.

Aufgabe:

Einen gegebenen Bruch in einen Decimalbruch zu verwandeln.

Auflösung:

Man hänge dem Zähler so viele Nullen an, als man Decimalstellen bestimmen will, dividire mit dem Nenner, und setze im Quotienten das Comma nach so viel Stellen, als man dem Zähler Nullen angehangen hat. z. B. $\frac{3}{4} = \frac{3{,}00}{4} = 0{,}75$

$\frac{2}{3} = \frac{2{,}0000}{3} = 0{,}6666 \ldots$

Beweis:

Folgt alles aus (§. 87. III Zus. und §. 90.).

I Zusatz:

I Zusatz: So lange noch ein Rest bleibet, so ist der gefundene Decimalbruch dem gegebenen nicht ganz gleich, sondern kleiner, dieser Unterschied wird immer unmerklicher, jemehr Decimalstellen man suchet.

II Zusatz: Bey der Division ganzer Zahlen, kann man dem Reste (§. 56. I - III Zus.) entweder Nullen anhängen, und so die Quotienten in Decimalen näher bestimmen, oder man schreibe unter selben den Divisor, und setze diesen Bruch zu dem in ganzen Zahlen gefundenen Quotienten z. B. $15 : 4 = 3{,}75 = 3 + \frac{3}{4}$; denn $D = d\,q + r$; mithin $D : d = q + \frac{r}{d}$

III Haupt-

III Hauptstück.

Von Potenzen und Wurzeln der Zahlen.

I Abschnitt.

Von Erzeugung der Potenzen, und Ausziehung der Wurzeln aus einfachen Größen.

§. 92.

Erklärungen:

a Ein Product aus gleichen Factoren heißt eine **Potenz** oder **Dignität**; die Anzahl der gleichen Factoren heißt der **Grad**, oder **Exponent** der Potenz; die zweyte Dignität, oder das Product zweyer gleicher Factoren nennet man das **Quadrat**, die dritte Dignität den **Cubus**.

b Eine Potenz bezeichnet man dadurch, daß man nur einen der Factoren ausdrücket, ihre Anzahl oder den Exponenten rechts ober diesen Factor schreibt. z. B.

$a^2 = aa$; $a^3 = aaa$; $a^n = a.\ a.\ a. \ldots\ldots n.$

I Zusatz: Bey der angegebenen Bezeichnungsart kommen bey jeder Potenz drey verschiedene Größen vor, nemlich die Größe selbst oder der Factor, der

Expo=

Exponent der Dignität, und der Coefficient, oder die Zahl, die angiebt wie vielmal diese Dignität, oder der wievielte Theil von ihr gegeben sey. z. B. $3\,a^2$; $n\,a^m$; $\frac{1}{2}\,a^3$

II Zusatz: Potenzen, so wie jeder Factor, oder die Größe selbst sind allemal Zahlen, denn nur Zahlen lassen sich mit sich selbst multipliciren, und geben ein Product aus gleichen Factoren.

III Zusatz: Jede Potenz einer ganzen Zahl ist wieder eine ganze Zahl.

IV Zusatz: Wenn eine Zahl am Ende Nullen enthält, so hat ihr Quadrat doppelt so viel, der Cubus dreymal so viel, und die nte Potenz n mal so viel Nullen (§. 51. V Zus.) z. B. $10^2 = 100$; $10^3 = 1000$; $100^2 = 10000$; $50^2 = 2500$.

§. 93.

Aufgabe:

Eine Tabelle für die Quadrate und Cubos der ersten 9 Zahlen zu verfertigen:

Auflösung:

1. Man schreibe in einer horizontalen Reihe die 9 Zahlen der Ordnung nach,

2. multiplicire jede durch sich selbst, und schreibe die Producte unter sie, so enthält diese Reihe die Quadrate,

3. multiplicire letztere nochmal mit den obigen 9 Zahlen, und setze wieder diese Producte unter die Quadrate, so enthält die neue Reihe die Cubos.

Zahlen	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Quadrat	1	4	9	16	25	36	49	64	81
Cubus	1	8	27	64	125	216	343	512	729

§. 94.

Erklärungen:

a Die Quadratwurzel einer Zahl a heißt jene Zahl, die mit sich selbst multiplicirt a wieder giebt; die Cubicwurzel von a jene Zahl, die mit sich selbst dreymal multiplicirt, a zum Product giebt, z. B. 2 ist die Cubikwurzel von 8, und die Quadratwurzel von 4, weil $2 \times 2 \times 2 = 8$, und $2 \times 2 = 4$ ist; Ueberhaupt heißt die nte Wurzel von a jene Zahl, die mit sich selbst n mal multipicirt das Product a giebt. Die Zahl 2 bey der Quadratwurzel, die Zahl 3 bey der Cubikwurzel. und n bey der nten Wurzel heißt der **Exponent** der Wurzel.

b Um die Wurzel auszudrücken, setzt man der Zahl das Zeichen ($\surd$) vor, und schreibt in solches die Exponenten der Wurzel, nur bey der Quadratwurzel wird der Exponent ganz hinweggelassen z. B. $\surd^{3} 8$, $\surd^{n} 4$, $\surd^{n} a$.

I Zusatz:

I Zusatz: Bey der angegebenen Bezeichnungsart der Wurzeln kömmt iene Größe vor, aus der die Wurzel ausgezogen werden soll, ferner der Exponent, oder der Grad der Wurzel, und endlich der Coefficient, oder die Zahl, welche angiebt, wievielmal, oder der wievielte Theil der Wurzelgröße vorhanden ist; z. B. $3\sqrt[n]{a}$; $\frac{1}{2}\sqrt[n]{b}$.

II Zusatz: So wie die Potenz (§. 92. II Zus.) muß auch allemal die Wurzel eine Zahl seyn; d. i. die Ausdrücke: Potenz einer Größe, Wurzel einer Größe beziehen sich nur auf Größen als Zahlen betrachtet.

III Zusatz: Von Potenzen und Wurzeln gelten also alle jene Sätze, die bisher von ganzen und gebrochenen Zahlen überhaupt, sind erwiesen werden.

IV Zusatz: Die Wurzel von einem ächten Bruche ist keine ganze Zahl. (§. 92. III Zus.)

§. 95.

Anwendung des 9ten Grundsatzes (§. 19.) auf Potenzen und Wurzeln:

1. Von gleichen Größen sind alle Potenzen und Wurzeln von einerley Grade gleich; d. i.

Wenn $a = b$; so ist $a^n = b^n$ und $\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{b}$.

2. Von ungleichen Zahlen sind Potenzen und Wurzeln von einerley Grade verschieden, und die größere

Zahl

Zahl giebt eine größere Potenz und Wurzel, als die kleinere, d. i.

Wenn $a > b$; so ist $a^n > b^n$; und $\sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}$.

§. 96.

Lehrsatz:

Die Potenz eines Productes ist ein Product aus den Potenzen der Factoren; oder man erhebt ein Product zu einer verlangten Dignität, wenn man jeden Factor zu solcher erhebt; d. i. $(a\,b)^m = a^m\,b^m$

Beweis:

$(a\,b)^m = a\,b.\ a\,b.\ a\,b \ldots\ldots m$; d. i. ein Product aus m Factoren a b (§. 92.), oder aus m Factoren a in eben so viele b, d. i. $a^m.\ b^m$.

z. B. $(3 \times 4)^2 = 9 \times 16 = 144$; $(2.\ 3)^3 = 8.\ 27 = 216$.

Zusatz:

Die Wurzel eines Productes ist wieder ein Product aus den Wurzeln der Factoren, oder man zieht aus einem Producte eine verlangte Wurzel aus, wenn man aus jedem Factor solche auszieht; $\sqrt[m]{a\,b} = \sqrt[m]{a}.\ \sqrt[m]{b}$.

Denn

$(\sqrt[m]{a}\ \sqrt[m]{b})^m = a\,b$. z. B. $\sqrt{(16 \times 9)} = 4 \times 3 = 12$.

§. 97.

§. 97.

Lehrsatz:

Die Potenz eines Bruches ist wieder ein Bruch aus der Potenz des Zählers und Nenners, oder man erhebt einen Bruch zu einer verlangten Dignität, wenn man den Zähler sowohl als den Nenner dazu erhebt, d. i. $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$

Beweis:

$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \ldots\ldots m$ (§. 92.) $= \frac{a^m}{b^m}$ (§. 84.)

z. B. $\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}$; $\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$

I Zusatz: Die Wurzel eines Bruches ist wieder ein Bruch aus der Wurzel des Zählers und Nenners, oder man zieht aus einem Bruche eine verlangte Wurzel, wenn man sie sowohl aus dem Zähler, als dem Nenner auszieht; oder

$\sqrt[m]{\left(\frac{a}{b}\right)} = \frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}}$; denn $\left(\frac{\sqrt[m]{a^m}}{\sqrt[m]{b}}\right) = \frac{a}{b}$

z. B. $\sqrt{\frac{4}{16}} = \frac{2}{4}$; $\sqrt[3]{\frac{1}{8}} = \frac{1}{2}$; $\sqrt{\frac{4}{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$

II Zusatz: Jede Potenz eines ächten Bruches ist wieder ein ächter Bruch; denn man erhält die Potenz eines Bruches, wenn man den Zähler so oft mit selbst, und eben so den Nenner mit selbst so oft

multi-

multiplicirt, als der Exponent der verlangten Dignität angiebt, nun ist aber bey einem ächten Bruche das Product der Zähler kleiner, als jenes der Nenner, mithin die Potenz wieder ein ächter Bruch (§. 75.)

III Zusatz: Jede Potenz eines unächten Bruches, der sich auf keineganze Zahl bringen läßt, ist wieder ein Bruch von der nemlichen Art. Man kann diesen Bruch auf seine kleinste Benennung bringen, im Falle er nicht schon durch die kleinste Benennung gegeben ist; nun sey sein Ausdruck $\frac{u}{x}$; wo also $u \triangleright x$, und beyde Primzahlen unter sich sind (§. 78.). Wäre nun irgend eine Potenz dieses Bruches z. B. das Quadrat eine ganze Zahl n; so das $\frac{n^2}{x2} =$

$\frac{u.u}{x.x} = n$; so mußte auch $\frac{u.u}{x} = n\,x$ eine ganze Zahl, mithiu u. u durch x theilbar seyn. Da aber das Product u u keine andere Factoren als der einfache Factor u enthält, x aber mit u keinen Faktor gemein hat, so ist x kein Maaß von u u mithin $\frac{n^2}{x^2}$ keine ganze Zahl; das nemliche gilt von jeder andern Potenz.

IV Zusatz: Wenn die Wurzel einer ganzen Zahl keine ganze Zahl ist, so ist sie auch kein Bruch, denn sonst müßte auch die Potenz d. i. die gegebene Zahl gegen die Annahme ein Bruch seyn; so eine

Wurzel

Wurzel läßt sich also nie vollständig angeben. z. B.

$\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{3}$, $\sqrt{4}$ u. s. f.

§. 98.

Erklärung:

Eine Zahl, die sich durch eine ganze, oder gebrochene Zahl vollkommen darstellen läßt, heißt eine **Rationalzahl**, die sich hingegen weder durch eine ganze, noch eine gebrochene Zahl vollständig angeben läßt, heißt eine **Irrationalzahl.**

Zusatz:

Wurzeln aus ganzen Zahlen, die keine ganze Zahlen sind (§. 97. IV Zus.) sind Irrationalgrößen oder Irrationalzahlen. z. B. $\sqrt{24}$; $\sqrt[3]{48}$.

§. 99.

Lehrsatz:

Jede Potenz einer positiven Größe ist positiv.

Beweis:

Das Product aus lauter positiven Foctoren ist positiv (§. 60. Zus.), und jede Potenz einer positiven Größe oder Zahl ist so ein Product. (§. 92.) z. B. $(+a)^4 = +a^4$.

§. 100.

Lehrsatz:

Von einer negativen Größe sind alle Potenzen

I mit geraden Exponenten positiv,
II mit ungeraden Exponenten negativ.

Beweis I: Jede Potenz einer negativen Größe mit einem geraden Exponenten läßt sich durch $(-a)^{2n}$ ausdrücken (§. 72. I Zus.), ist daher ein Product aus $2n$ oder n Paar gleichen Factoren, nun ist aber das Product eines jeden Paares positiv, denn $-a \times -a = +a^2$, folglich ist auch das Product von n solchen Paaren, mithin die Potenz selbst positiv oder $(-a)^{2n} = +a^{2n}$; z. B. $-3 \times -3 = +9$.

Beweis von II. Die Potenz einer negativen Größe mit einem ungeraden Exponenten, oder $(-a)^{2n+1}$ (§. 72. I Zus.) ist ein Product aus n Paar positiven Factoren in einen negativen, mithin negativ. $(-2^3) = -8$.

I Zusatz: Die Wurzel mit einem geraden Exponenten aus einer positiven Größe kann positiv oder negativ seyn; z. B. $\sqrt[2]{4} = \pm 2$.

II Zusatz: Die Wurzel mit einem ungeraden Exponenten hat das Zeichen der Größe oder Dignität.

z. B. $\sqrt[3]{+8} = +2$; $\sqrt[3]{-8} = -2$.

III Zusatz:

III Zusatz: Aus einer negativen Größe läßt sich keine Wurzel mit einem geraden Exponenten angeben, man heißt daher solche Wurzelgrößen **unmögliche**, oder **eingebildete Größen**. z. B. $\sqrt[4]{-4}$; $\sqrt[4]{-3}$; überhaupt: $\sqrt[2n]{-a}$, welches der allgemeine Ausdruck für unmögliche Größen ist.

II Abschnitt.

Rechnungsarten mit Potenzen.

§. 101.

Erklärungen:

a Potenzen von einerley Größen und einerley Exponenten (§. 92. I Zus.) sind **gleichartig** z. B. $3a^2$ und $5\frac{1}{2}a^2$; hingegen wenn die Größen, oder Exponenten verschieden sind, **ungleichartig** z. B. $3a^2$, $2b^2$, $3\frac{1}{2}a^3$.

b Potenzen von gleichen Exponenten sind **gleichnamig**, z. B. a^3, b^3; mit verschiedenen Exponenten **ungleichnamig**. z. B. a^2, a^3.

I Zusatz: Gleichartige Größen sind gleichnamig, aber nicht allemal umgekehrt.

II Zusatz: Eine Größe mit dem Exponenten 1 ist die unveränderte Größe selbst, oder $a^1 = a$; denn der Exponent 1 drückt aus, daß nur ein Factor a vorhanden sey. (§. 92. b.)

§. 102.

Aufgabe:

Potenzen zu addiren.

Auflösung:

1. Ungleichartige Potenzen schreibe man mit ihren Zeichen unverändert zusammen. (§. 37. Zus.)
2. Bey gleichartigen Potenzen mit einerley Zeichen addire man ihre Coefficienten, und setze der Summe das Zeichen der einzelnen Potenzen vor. (§. 36.)
3. Bey gleichartigen Potenzen mit verschiedenen Zeichen ziehe man den kleinern Coefficienten vom größern ab, und setze dem Reste das Zeichen des größern bey. (§. 37.)

z. B. $4\,a^2 - 3\,a^3\,b + \frac{1}{2}\,c^4 - e^n$

$3\,a^2 + a^3\,b + c^4 + f^n$

Summe $= 7\,a^2 - 2\,a^3\,b + {}^3/_2\,c^4 - e^n + f^n$

§. 103.

Aufgabe:

Potenzen zu subtrahiren.

Auflösung:

Auflösung:

Man ändere im Subtrahend alle Zeichen und addire.
(§. 38.)

z. B. $5\,a^3 + 3\,c^2\,m^3 - \frac{1}{3}\,r^2 + 4\,a^2$
$2\,a^3 - 2\,c^2\,m^3 + \frac{2}{3}\,r^2 - 5\,a^4$
$- \quad + \quad - \quad +$

Rest $= 3\,a^3 + 5\,c^2\,m^3 - r^2 + 5\,a^4 + 4\,a^2$

Zusatz:

Die Differenz zweyer Quadrate ist dem Producte aus der Summe ihrer Wurzeln in die Differenz derselben gleich, oder $a^2 - b^2 = (a + b)\,(a - b)$
eben so $1 - x^2 = (1 + x)\,(1 - x)$.

§. 104.

Lehrsatz:

Potenzen von einerley Größen werden multiplicirt, wenn man ihre Exponenten addirt; d. i.: $a^3 \times a^2 = a^5$ und überhaupt $a^m \times a^n = a^{m+n}$

Beweis:

Denn $a^3 = a\,a\,a$ (§. 92.)
$a^2 = a\,a$

$a^3 \times a^2 = a\,a\,a\,a\,a = a^5$

Ueberhaupt ist $a^m = a\,a\,a \ldots . m$; und $a^n = a\,a\,a \ldots . n$
mithin ist $a^m \times a^n$ ein Produkt aus m Faktoren von a,

in n Factoren vom nemlichen a, mithin besteht solches aus allen a der beyden Factoren a^m und a^n, ist daher $= a^{m+n}$

I Zusatz: Potenzen von gleichen Größen werden dividirt, wenn man vom Exponenten des Dividends jenen des Divisors subtrahirt, d. i.

$a^3 : a^2 = a^1$; und überhaupt $a^m : a^n = a^{m-n}$

Denn $a^1 \times a^2 = a^3$; und $a^{m-n} \times a^n = a^m$ (§. 43. b)

II Zusatz: Jede Zahl mit dem Exponenten o ist $= 1$ d. i. $x^0 = 1$; denn $x^0 = x^{1-1} = x^1 : x^1 = x : x = 1$

z. B. $5^0 = 1$; $(\frac{1}{2})^0 = 1$; $-8^0 = +1$.

III Zusatz: Eine Potenz mit einem negativen Exponenten ist einem Bruche gleich, dessen Zähler 1, und der Nenner die nemliche Potenz mit dem positiven Exponenten ist; d. i. $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$

Denn

$x^{-n} = x^{n-2n} = x^n : x^{2n} = x^n : x^n . x^n = 1 : x^n = \frac{1}{x^n}$

IV Zusatz: Potenzen von einerley Größen werden nach der nemlichen Regel multiplicirt, es mögen die Exponenten das Zeichen + oder − vor sich haben, d. i. $x^{-n} \times x^{-2n} = x^{-3n}$

Denn

Denn $x^{-n} \cdot x^{-2n} = x^{\frac{1}{n}} \times x^{\frac{1}{2n}} = x^{\frac{1}{3n}} = x^{-3n}$

Eben so ist $x^{-3} \times x^{2} = x^{-1}$

V Zusatz: Bey der Division der Potenzen von einerley Größen macht die Verschiedenheit der Zeichen bey ihren Exponenten keine Ausnahme von der gegebenen Regel, d. i. $a^{m} : a^{-n} = a^{m+n}$; und $a^{-m} : a^{n} = a^{-m-n}$

Denn

$a^{m} : a^{-n} = a^{m} : \frac{1}{a^{n}} = a^{m} \times \frac{a^{n}}{1}$ (§. 85. II Zus.) $= a^{m+n}$

Eben so ist

$a^{-m} : a^{n} = \frac{1}{a^{m}} : a^{n} = \frac{1}{a^{m+n}}$ (§. 74. VI Zus.) $= a^{-m-n}$

§. 105.

Lehrsatz:

Eine Potenz wird zu einer verlangten Dignität erhoben, wenn man den Exponenten der Potenz mit dem Exponenten der verlangten Dignität multiplicirt. d. i.

$(a^{3})^{2} = a^{6}$; und überhaupt $(a^{m})^{n} = a^{mn}$

Beweis:

Beweis:

$(a^3)^2 = a^3 . a^3$ (§. 92.) $= a^{3+3}$ (§. 104.) $= a^{3\cdot 2} = a^6$

Eben so ist

$(a^m)^n = a^m . a^m . a^m \ldots . n = a^{m+m+m \ldots . n} = a^{mn}$.

I Zusatz: Man zieht aus einer Potenz eine verlangte Wurzel aus, wenn man den Exponenten der Potenz durch den Exponenten der verlangten Wurzel dividirt. d. i.

$\sqrt[3]{a^6} = a^2$, und überhaupt $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$

Denn $(a^2)^3 = a^6$, und eben so $\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^n = a^m$ (§. 94.)

II Zusatz: Potenzen von einerley Größen mit gebrochenen Exponenten werden nach der §. 104 gegebenen Regel miteinander multiplicirt und dividirt, d. i.

$\frac{m}{n} \quad \frac{r}{p} \quad \frac{mp}{np} \quad \frac{nr}{np} \quad \frac{mp+nr}{np}$

$a \times a = a \times a = a$

$\frac{m}{n} \quad \frac{r}{p} \quad \frac{mp-nr}{np}$

Und $a : a = a$

§. 106.

Aufgabe:

Zusammengesetzte Potenzen mit einander zu multiplici-ren, oder dividiren

Auflösung:

Man verfahre ganz wie (§. 63. u. 64.), bestimme aber die einzelnen Producte und Quotienten nach §. 104.

Bey-

Beyspiel der Multiplication:

$$3x^2 + 4ax - a^2$$
$$3x^2 - a^2$$

$$9x^4 + 12ax^3 - 3a^2x^2$$
$$- 3a^2x^2 - 4a^3x + a^4$$

Product $= 9x^4 + 12ax^3 - 6a^2x^2 - 4a^3x + a^4$

Beyspiel der Division:

$$a^4 - b^4 \;[\; a^3 - a^2b + ab^2 - b^3$$
$$(a + b)$$
$$a^4 + a^3b$$
$$- \quad -$$
$$- a^3b - b^4$$
$$(a + b)$$
$$- a^3b - a^2b^2$$
$$+ \quad +$$
$$a^2b^2 - b^4$$
$$(a + b)$$
$$a^2b^2 + ab^3$$
$$- \quad -$$
$$- ab^3 - b^4$$
$$(a + b)$$
$$- ab^3 - b^4$$
$$+ \quad +$$
$$0$$

§. 107.

Lehrsatz:

Jede Potenz der Zahl 2 ist größer als die ganze Zahl, die ihren Exponenten ausdrückt. d. i. $2^m > m$

Beweis:

1. Offenbar ist $2^1 > 1$; $2^2 > 2$, $2^3 > 3$

2. Man nehme nun an, n drücke eine ganze Zahl aus, die größer als 1, und es sey für sie $2^n > n$ so ist

wenn	$2^n > n$	und $n > 1$
	$2 = 2$	$n = n$
also	$2^{n+1} > 2n$ (§. 104.)	$2n > n + 1$

mithin $2^{n+1} > n + 1$ (§. 19. 7. Grundſ.)

3. Da nun für $n = 3$ beyde Bedingungen gelten, so ist $2^4 > 4$, und wenn man wieder $n = 4$ ſetzet, so folget $2^5 > 5$, und ſo immer für die nächſt höhere Dignität, mithin iſt allgemein $2^m > m$.

§. 108.

§. 108.

Lehrsatz:

Jede endliche Größe a kann durch fortgesetzte Halbierungen kleiner als jede noch so kleine Größe c werden, oder $2^{\frac{a}{m}} < c$

Beweis:

Die Größe c mag so klein wie immer seyn, so läßt sich immer eine Zahl m finden, welche mit c multiplicirt ein Product giebt, welches größer als die Größe a ist, oder: $a < m\,c$

Nun ist $2^m > m$ (§. 107.).

Mithin $a^{\frac{a}{m}} < c$ (5 Grundsz. §. 44).

§. 109.

Aufgabe:

Einen Bruch z. B. $\frac{a}{b+c}$ durch fortgesetzte Division aufzulösen.

Auflösung:

Man nehme den Zähler zum Dividend, und den Nenner zum Divisor (§. 74.), und dividire nach (§. 64.), die einzelnen Quotienten und Producte bestimme man nach den einzelnen Regeln für die vorkommenden Größen, d. i.

$$\begin{array}{l} a \\ (b+c) \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \frac{a}{b} - \frac{ac}{b^2} + \frac{ac^2}{b^3} - \frac{ac^3}{b^4} \\ a + \frac{ac}{b} \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{l} - \quad - \\ \hline - \frac{ac}{b} \\ (b+c) \\ - \frac{ac}{b} - \frac{ac^2}{b^2} \\ + \quad + \\ \hline + \frac{ac^2}{b^2} \\ (b+c) \\ + \frac{ac^2}{b^2} + \frac{ac^3}{b^3} \\ - \quad - \\ \hline - \frac{ac^3}{b^3} \\ (b+c) \\ - \frac{ac^3}{b^3} - \frac{ac^4}{b^4} \\ + \quad + \\ \hline + \frac{ac^4}{b^4} \end{array}$$

I Zusatz: $\frac{a}{b-c} = \frac{a}{b} + \frac{ac}{b^2} + \frac{ac^2}{b^3} + \frac{ac^3}{b^4} + \frac{ac^4}{b^4} : (b-c)$

(§. 91. II Zus.)

II Zusatz:

II Zusatz: $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \frac{x^5}{1-x}$

III Zusatz: $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \frac{x^5}{1+x}$

IV Zusatz: $\frac{1}{1-1} = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + \frac{1}{1-1}$

V Zusatz: $\frac{1}{2-1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} : (2-1) = 1$

VI Zusatz: $\frac{1}{2+1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \frac{1}{16} : (2+1) = \frac{1}{3}$

§. 110.

Erklärungen:

a Eine Menge von Größen, deren jede nach einem allgemeinen Gesetz bestimmet ist, heißt eine Reihe (Series), die einzelnen Größen ihre Glieder (termini), und ein Ausdruck dieses Gesetzes, oder jedes Gliedes, das allgemeine Glied (terminus generalis) z. B. alle im vorhergehenden §. angegebene Quotienten sind Reihen, das Gesetz z. B. in der Reihe des II Zusatzes ist: jedes Glied des Quotienten ist eine Potenz von x, und ihr Exponent ist allemal der Anzahl der vorhergehenden Glieder gleich, so ist das 5te Glied $= x^4$, das erste $1 = x^0$; und das allgeneine Glied $= x^{n-1}$

b Die Reihe heißt steigend oder divergierend, wenn die Glieder immer zunehmen, fallend, convergirend, wenn ihre Glieder immer abnehmeu.

c Wenn

c Wenn die Reihe aus einer bestimmten Anzahl von Gliedern besteht, so heißt sie **endlich** (Series finita) lassen sich hingegen nie alle Glieder darstellen, so ist sie eine **unendliche** Reihe (Series infinita.)

III Abschnitt.

Rechnungsarten mit Wurzelgrößen.

§. 111.

Erklärung:

Ein Ausdruck $\sqrt[n]{a}$, welcher anzeiget, daß aus einer gegebenen Größe a, eine bestimmte Wurzel vom Grade n gezogen werden soll, heißt eine **Wurzelgröße**; da die Wurzelgrößen meist irrationalzahlen sind (§. 98.), so nennet man auch gewöhnlich die Rechnung mit Wurzelgrößen die Rechnung mit Irrationalgrößen.

Zusatz:

Jede Wurzelgröße läßt sich auf den Ausdruck einer Potenz mit einem gebrochenen Exponenten bringen;

und umgekehrt. d. i. $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$; $\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}}$

(§. 105. I Zus.)

§. 112.

Erklärungen:

a Wurzelgrößen, die gleiche Größen, und gleiche Exponenten haben (§. 94. I Zus.) heißen **gleichartig**, z. B. $\sqrt[n]{}$

$\sqrt[n]{a}$; $3\sqrt[n]{a}$; ferner $\frac{1}{2}\sqrt[m]{a^n}$ und $2\sqrt[m]{a^n}$ im Gegentheile ungleichartig z. B. $\sqrt[n]{a}$, $\sqrt[n]{b}$, $\sqrt[n]{a}$

b Wurzelgrössen von gleichen Exponenten heißen gleichnamig z. B. $\sqrt[n]{a}$, $\sqrt[n]{b}$, von verschiedenen Exponenten ungleichnamig. z. B. $\sqrt[n]{a}$, $\sqrt[m]{b}$, $\sqrt[r]{a}$

Zusatz:

Gleichartige Wurzeln sind gleichnamig, aber nicht umgekehrt.

§. 113.

Aufgabe:

Wurzelgrößen zu addiren, und zu subtrahiren.

Auflösung:

Man verfahre wie bey den Potenzen (§. 102, u. 103).

Beweis:

Wurzelgrößen lassen sich auf Potenzen reduciren (§. 111 Zus.) mithin gelten von ihnen die nemlichen Regeln. z. B.

I. $5\sqrt[3]{a} - 3\sqrt[n]{b} + \sqrt[m]{c^2} + \sqrt[m]{e}$

$2\sqrt[3]{a} - 5\sqrt[n]{b} - \sqrt[n]{d} + \sqrt[m]{e}$

Summe $= 7\sqrt[3]{a} - 8\sqrt[n]{b} + \sqrt[m]{c^2} - \sqrt[n]{d} + \sqrt[m]{e} + \sqrt[m]{e}$

II. $5\sqrt[3]{a} - 3\sqrt[n]{b} + \sqrt[m]{c^2} + \sqrt{e}$

$2\sqrt[3]{a} - 5\sqrt[n]{b} - \sqrt{d} + \sqrt{e}$

$- \quad + \quad + \quad -$

Rest $= 3\sqrt[3]{a} + 2\sqrt[n]{b} + \sqrt[n]{c^2} + \sqrt[m]{d} + \sqrt{e} - \sqrt{e}$

§. 114.

Aufgabe:

Gegebene Wurzelgrößen gleichnamig zu machen.

Auflösung

1. Man bringe die gegebenen Wurzelgrößen auf den Ausdruck von Potenzen mit gebrochenen Exponenten (§. 111. Zus.)
2. bringe diese Exponenten unter einerley Benennung (§. 80.)
3. setze die Zähler als Exponenten Rechts ober die Größen und
4. den gemeinschaftlichen Nenner in das Wurzelzeichen.

z. B. Man soll $\sqrt[n]{a}$ und $\sqrt[n]{b^3}$ gleichnamig machen, so ist

$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{2}}$; $\sqrt[n]{b^3} = b^{\frac{3}{n}}$ N. 1.

$\frac{1}{2}, \frac{3}{n} = \frac{n}{2n}, \frac{6}{2n}$ N. 2.

$\sqrt[2n]{a^n} = a^{\frac{n}{2n}} = \sqrt[2n]{a^n}$; $\sqrt[n]{b^3} = b^{\frac{6}{2n}} = \sqrt[2n]{b^6}$ N. 3. u. 4.

§. 115.

§. 115.

Aufgabe:
Wurzelgrößen mit einander zu multipliciren.

Auflösung:

1. Sind die Wurzelgrößen gleichnamig, so multiplicire man die Größen vor und nach dem Wurzelzeichen mit einander.
2. Sind sie ungleichnamig, so mache man sie gleichnamig und verfahre wie vorher.

z. B $\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{c} = \sqrt[n]{ac}$; $3\sqrt[n]{a} \times 2\sqrt[n]{c} = 6\sqrt[n]{ac}$.

Beweis:

$\sqrt{a} \times \sqrt{c} = a^{\frac{1}{2}} \times c^{\frac{1}{2}} = (ac)^{\frac{1}{2}}$ (§. 96) $= \sqrt{ac}$

Eben so ist

$3\sqrt[n]{a} \times 2\sqrt[n]{c} = 3a^{\frac{1}{n}} \times 2c^{\frac{1}{n}} = 6a^{\frac{1}{n}}c^{\frac{1}{n}} = 6(ac)^{\frac{1}{n}} = 6\sqrt[n]{ac}$

Die Regel für Nro. 2. bedarf keines eigenen Beweises.

§. 116.

Aufgabe:
Wurzelgrößen mit einander zu dividiren.

Auflösung:

1. Sind die Wurzelgrößen gleichnamig, so dividire man die Größen vor und nach dem Wurzelzeichen mit einander.
2. Sind sie ungleichnamig, so mache man sie gleichnamig, und verfahre wie vorher.

d. i. $6\sqrt[n]{a} : 3\sqrt[n]{b} = 2\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$

Beweis:

$$\sqrt[n]{6}a : \sqrt[n]{3}b = 6a^{\frac{1}{n}} : 3b^{\frac{1}{n}} = 2\frac{a^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}} = 2\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}} = 2\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

Für den 2ten Fall bedarf die angegebene Regel keines eigenen Beweises.

§. 117.

Aufgabe:

Zusammengesetzte Wurzelgrößen mit einander zu multipliciren, oder zu dividiren.

Auflösung:

Man verfahre ganz wie §. 63 und 64, bestimme aber die Größe der einzelnen Quotienten und Producte aus §. 115 und 116.

I. $\sqrt{3} + \sqrt{2}$
$\sqrt{3} - \sqrt{2}$

$\sqrt{9} + \sqrt{6}$
$- \sqrt{6} - \sqrt{4}$

Product: $\sqrt{9} - \sqrt{4} = 3 - 2 = 1$

II. $48 - \sqrt{1280} - \sqrt{1620} + 30$ { $6 - \sqrt{20}$
$:(8 - \sqrt{45}$
$48 - \sqrt{1620}$

$- \sqrt{1280} + 30$
$(8 - \sqrt{45})$
$- \sqrt{1280} + 30$

—

An-

Anmerkung: In dem Beyspiel der Division, wo ganze Zahlen mit Wurzelgrößen multiplicirt und dividirt werden sollen, muß man erst die ganze Zahl zur Dignität der Wurzel erheben, und das Wurzelzeichen vorsetzen, so ist $6 = \sqrt{36}$; $8 = \sqrt{64}$; dann wird nach den gegebenen Regeln verfahren.

§. 118.

Aufgabe:

Eine Wurzelgröße zu einer beliebigen Dignität zu erheben.

Auflösung:

Man erhebe die Größe nach dem Wurzelzeichen zur verlangten Dignität. D. i. $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$

Beweis:

$$(\sqrt[n]{a})^m = (a^{\frac{1}{n}})^m \text{ (§. 111. Zus.)} = a^{\frac{m}{n}} \text{ (§. 105.)} = \sqrt[n]{a^m}.$$

§. 119.

Aufgabe:

Aus einer Wurzelgröße eine beliebige Wurzel auszuziehen.

Auflösung:

Man multiplicire die Exponenten der Wurzeln mit einander. D. i. $\sqrt[m]{(\sqrt[n]{a})} = \sqrt[mn]{a}$

Beweis:

$$\sqrt[m]{(\sqrt[n]{a})} = \sqrt[m]{(a^{\frac{1}{n}})} = a^{\frac{1}{m.n}} \text{ (§. 105. I Zuſ.)} = \sqrt[mn]{a}$$

IV Abſchnitt.

Von dem Quadrate und der Quadratwurzel vieltheiliger Größen.

§. 120.

Lehrſatz:

Das Quadrat einer zweytheiligen Größe beſteht aus dem Quadrate des erſten Theiles, dem doppelten Producte des erſten in den zweyten Theil, und aus dem Quadrate des zweyten Theiles. D. i.

I $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$, und II $(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$

Beweis: I. $a+b$

$a+b$

a^2+ab

$+ab+b^2$

$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$

II. $a-b$

$a-b$

a^2-ab

$-ab+b^2$

$(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$

I. Zuſatz. Die Formel II läßt ſich aus I unmittelbar finden, wenn man b als eine negative Größe ſetzet, das iſt, aus der erſten Formel läßt ſich ſowohl die Summe als die Differenz zweyer Größen, ohne dieſelbe erſt mit ſich ſelbſt zu multiplicieren (§ 92) quadriren, oder

$$(12)^2 = (10 + 2)^2 = 100 + 40 + 4 = 144;$$
$$8^2 = (10 - 2)^2 = 100 - 40 + 4 = 64$$

II. Zusatz. Drey und mehrtheilige Größen lassen sich nach der nemlichen I. Formel quadriren, wenn man zuerst anfangs die ersten zwey Theile nach der obigen Formel quadrirt, dann das ganze gefundene Quadrat als das Quadrat von a der Formel nimmt, und den folgenden 3ten Theil für b setzet, und wieder $2ab + b^2$ bestimmt, ferner aufs neue das ganze bisher gefundene $= a^2$ der Formel setzet, und so wieder fortfährt;

Denn $(p+q+r)^2 = p^2 + 2pq + q^2 + 2pr + 2qr + r^2$
$= (p^2 + 2pq + q^2) + 2(p+q)r + r^2$
$= (p+q)^2 + 2(p+q)r + r^2$

Eben so ist:

$(p+q+r+s)^2 = p^2 + 2pq + q^2 + 2pr + 2qr + r^2$
$+ 2ps + 2qs + 2rs + s^2$
$= (p^2 + 2pq + q^2) + 2(p+q)r + r^2$
$+ 2(p+q+r)s + s^2$

III. Zusatz. Wenn man aus einer mehrtheiligen Größe A die Quadratwurzel ziehen soll, so muß sie unter der ersten Formel enthalten seyn, das ist, in ihr müssen alle Theile der Formel gegeben seyn; wenn dieses statt hat, so heißt die Größe A ein **vollkommenes Quadrat**, im Gegentheil ein **unvollkommenes.**

§. 121.

Aufgabe:

Aus vieltheiligen Größen in der Buchstabenrechnung die Quadratwurzel auszuziehen.

Auflösung:

1. Man ordne die Buchstaben nach einer in selben befindlichen Potenz, so, daß ihr Quadrat den ersten Platz, die einfache Größe den zweyten erhält, an die dritte Stelle setze man jenen Theil, wo sie nicht mehr vorkömmt.

2. Aus der an die erste Stelle gesetzten Größe ziehe man die Quadratwurzel aus, nehme sie für a im Formular I. §. 120, und subtrahire ihr Quadrat.

3. Den Rest dividire man mit 2a, d. i. mit dem Duplo der gefundenen Wurzel, der gefundene Quotient wird als der zweyte Theil b der Wurzel angesetzt, und zugleich neben dem Divisor hingeschrieben,

4. Nun multiplicire man mit solcher die Summe $= 2a + b$ so bekömmt man $2ab + b^2$ des Formulars, ziehe das Product ab; Ist dadurch die gegebene Größe völlig erschöpfet, so enthalten die gefundenen zwey Theile die gesuchte Wurzel.

5. Bleibt aber ein Rest, so nehme man die gefundenen zwey Theile der Wurzel für den ersten Theil des Formulars $= a$ (§. 120. II. Zus.) und suche nach Nro. 3. 4. den folgenden Theil, und im Falle abermal ein Rest bleibt, so nehme man alle drey gefundene Theile

der

der Wurzel für a der Formel, und setze so das Verfahren immer fort.

6. Im Falle die gegebenen Größen kein vollkommenes Quadrat enthalten (§. 120. III. Zus.) so nähert man sich durch Nro. 5. der wahren Wurzel zwar, aber man kann sie nie erschöpfen, mithin muß die Natur der gegebenen Größen entscheiden, wie weit man diese Annäherung fortsetzen soll.

I. Beyspiel. $4c^2 + 4cd + d^2 \left\{ \begin{matrix} (a+b) \\ 2c+d \end{matrix} \right.$

$(a^2) = 4c^2$

$$\overline{\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

$$+4cd+d^2$$

$(2a+b) = (4c+d)$

$(2ab+b^2) = +4cd+d^2$

$$\overline{\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

Mithin $\sqrt{}(4c^2+4cd+d^2) = 2c+d.$

II. Beyspiel:

$$\tfrac{1}{4}a^2 - ae + e^2 + 2ex - \frac{4e^2x}{a} + \frac{4e^2x^2}{a^2} \left\{ \begin{matrix} \tfrac{1}{2}a - e + \frac{2ex}{a} \end{matrix} \right.$$

$(a^2) = \tfrac{1}{4}a^2$

$$\overline{\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

$$-ae+e^2+2ex-\frac{4e^2x}{a}+\frac{4e^2x^2}{a^2}$$

$(2a+b) = (a-e)$

$(2ab+b^2) = -ae+e^2$

$$\overline{\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

$$2ex-\frac{4e^2x}{a}+\frac{4e^2x^2}{a^2},$$

(2a

$$(2a + b) = (a - 2e + \frac{2ex}{a})$$

$$(2ab + b^2) = + 2ex - \frac{4e^2x}{a} + \frac{4e^2x^2}{a^2}$$

Folglich ist

$$\sqrt{(\tfrac{1}{4}a^2 - ae + e^2 + 2ex - \frac{4e^2x}{a} + \frac{4e^2x^2}{a^2})} = \tfrac{1}{2}a - e + \frac{2ex}{a}$$

§. 122.

Lehrsatz:

Die Anzahl der Ziffern, woraus die Quadratzahl besteht, ist

I. nie größer, als die doppelte Anzahl n der Ziffern der Wurzel, z. B. besteht eine Zahl aus drey Ziffern, so hat ihre Quadrat höchstens 6 Ziffern.

II. nie kleiner, als die doppelte Anzahl dieser Ziffern, weniger Eins; d. i. das Quadrat einer Zahl von 3 Ziffern, hat wenigst 5 Ziffern.

Beweis von I.

1. Wenn man der Zahl 1 so viele Nullen anhängt, als eine andere Zahl Ziffern hat, so ist erstere allemal größer, d. i.

$10 > 8$	mithin auch (2 Grundſ. §. 95.)	
$100 > 97$		$100 > 8^2$
$1000 > 978$		$10000 > 97^2$
		$1000000 > 978^2$

2. Nun

2. Nun ist 100 die kleinste Zahl mit 3 Ziffern, folglich kann 8^2, oder überhaupt das Quadrat einer Ziffer nur aus zweyen bestehen, sonst wäre $8^2 =$ oder > 100.

Eben so ist 10000 die kleinste Zahl von 5 Ziffern, daher kann 97^2 oder jedes Quadrat zweyer Ziffer höchst 4 Ziffern enthalten;

Und 1000000 ist die kleinste Zahl von 7 Ziffern, mithin enthält 978^2 oder das Quadrat dreyer Ziffern höchstens 6 Ziffern.

3. Dieser bisher aus Induction geführte Beweis läßt sich allgemein machen:

Es bestehe eine Zahl aus n Ziffern oder $= 978 \ldots\ldots n$ so ist 1 mit n angehängten Nullen größer; d. i.

10^n (§. 92. IV. Zus.) $> 978 \ldots\ldots n$, mithin auch

10^{2n} (§. 105.) $> (978 \ldots\ldots n)^2$

Die Zahl 10^{2n} ist die kleinste mit $2n+1$ Ziffern, folglich kann das Quadrat $(978 \ldots. n)^2$, d. i. von n Ziffern höchstens 2n Ziffern enthalten; sonst müßte solches $=$ oder $> 10^{2n}$ seyn, welches unmöglich ist.

Beweis von II.

1. Unter Zahlen, die gleichviele Ziffern haben, ist immer jene die kleinste, wo nach 1 lauter Nullen folgen. D. i.

$1 < 4$	mithin auch $1 < 4^2$
$10 < 23$	$100 < 23^2$
$100 < 253$	$1000 < 253^2$

2. Da nun 1 die kleinste Zahl mit einem Ziffer, 100 die kleinste mit 3 Ziffern, 1000 die kleinste mit 4 Ziffern ist, so kann 4^2 nicht weniger Ziffern als eines, 23^2 nicht weniger als 3, und 253^2 nicht weniger als 5 Ziffern haben, mithin geben die Zahlen mit einem, zwey oder drey Ziffern im Quadrate nie weniger Ziffer als das Duplum um Eins vermindert.

3. Ueberhaupt ist $10^{n-1} < 235 \ldots\ldots n$

mithin auch $10^{2n-2} < (235 \ldots\ldots n)^2$

Nun ist aber 10^{2n-2} die kleinste Zahl von $2n - 1$ Ziffern, folglich kann $(235 \ldots\ldots n)^2$ das Quadrat jeder Zahl nicht weniger als $2n-1$, d. i. die doppelte Anzahl der Ziffern weniger Eins ihrer Wurzel enthalten.

Zusatz:

Wenn man eine gegebene ganze Zahl von der Rechten zur Linken in Classen zu zwey Ziffern theilet, so enthält ihre Quadratwurzel so viele Ziffern, als man Classen bekömt; denn man erhalte n Classen, so besteht die gegebene Zahl aus 2n oder $2n-1$ Ziffern, je nachdem für die höchste Classe zwey oder nur eine Ziffer trifft, mithin ist die Anzahl der Ziffern für die Wurzel allemal n.

§. 123.

Lehrsatz:

Wenn eine ganze Zahl, aus der man die Quadratwurzel ziehen soll, aus drey oder mehrern Ziffern besteht, so ist

I. Das niedrigste Ziffer vom Quadrate des ersten Theiles der Wurzel oder a^2 im letzten Ziffer der ersten Classe; (von der Linken zur Rechten gezählet) vom doppelten Producte des ersten in den zweyten oder folgenden Theil, oder 2ab im ersten Ziffer der nächstfolgenden Classe, vom Quadrate dieses Theiles oder b^2 im letzten Ziffer dieser Classe enthalten.

II. Nimmt man die zwey gefundenen Theile als einen oder für a, so ist wieder das niedrigste Ziffer vom Duplo desselben in den folgenden Theil der Wurzel, oder 2ab im ersten Ziffer der folgenden Classe, und vom Quadrate dieses Theiles oder b^2 im letzten Ziffer dieser Classe enthalten.

III. Ueberhaupt, wenn man die bisher gefundenen Theile für einen Theil = a nimmt, so ist das niedrigste Ziffer vom doppelten Producte dieses Theiles in den folgenden Theil oder 2ab im ersten, und vom Quadrate dieses Theiles, oder b^2 allemal im letzten Ziffer der folgenden Classe enthalten.

Beweis von I. Wenn die gegebene Zahl m + 1 Classen enthält, so besteht die Quadratwurzel aus eben so vielen Ziffern (§. 122. Zus.), man bezeichne das erste Ziffer mit f, das folgende mit g, aber ohne ihren

ren Localwerth dadurch auszudrücken, so ist $a = f. 10^m$; und $b = g. 10^{m-1}$; folglich $a^2 = f^2. 10^{2m}$, $2ab = 2fg. 10^{2m-1}$, $b^2 = g^2. 10^{2m-2}$; das ist: das Quadrat des ersten Theiles der Wurzel besteht aus der Quadratzahl des Ziffers f ohne Localwerth betrachtet, das niedrigste Ziffer aber davon ist schon von der Ordnung 2m, oder von der Ordnung des letzten Ziffers der höchsten Classe, denn nach selber folgen ebenfalls m Classen oder 2m Ziffern; das niedrigste Ziffer von 2ab ist von der Ordnung 2m—1, mithin jener des ersten Ziffers der folgenden Classe; hingegen ist das niedrigste Ziffer von b^2 von der Ordnung 2m—2, mithin von der nemlichen wie das letzte Ziffer dieser folgenden Classe.

Beweis von II. Setzet man wieder die zwey gefundenen Theile $= a$ (§. 120. II. Zus.); und wiefern sie bloß aus Ziffern bestehen $= h$, das Ziffer vom folgenden Theile b aber $= i$; so ist wieder $a = h. 10^{m-1}$ und $b = i. 10^{m-2}$; mithin $2ab = 2hi. 10^{2m-3}$ und $b^2 = i^2. 10^{2m-4}$, d. i. das doppelte Product der beyden ersten Theile in den folgenden Theil der Wurzel hat sein niedrigstes Ziffer im ersten, und das Quadrat dieses neuen Theiles in dem letzten Ziffer dieser Classe.

Beweis von III. Nimmt man nun überhaupt (§. 120. II. Zus.) die bisher gefundenen Theile der Wurzel zusammen als einen $= a$, so ist das niedrigste Ziffer

davon

davon von der sovielten Ordnung, als noch Classen vorhanden sind, z. B. n, mithin $a = p.\ 10^n$, und der folgende Theil $b = q.\ 10^{n-1}$, folglich $a^2 = p^2.\ 10^{2n}$; und $2ab = 2pq\ 10^{2n-1}$; $b^2 = q^2 10^{2n-2}$, das ist, das doppelte Product aller bisher gefundenen Theile in den folgenden hat allemal in dem ersten Ziffer, und das Quadrat dieses Theiles in dem letzten Ziffer der folgenden Classe seine niedrigste Stelle.

§. 124.

Aufgabe:

Aus einer ganzen Zahl von 3 oder vier Ziffern die Quadratwurzel zu ziehen.

Auflösung:

1. Man theile die gegebene Zahl von der Rechten zur linken Seite in Classen zu zwey Ziffern (§. 122. Zus.), so enthält die Wurzel zwey Ziffern, weil man zwey Classen bekömmt.

2. Man nehme aus der Tabelle §. 93. jenes Quadrat, welches der Zahl von der ersten Klasse links gezählet entweder gleich oder zu nächst kleiner ist, schreibe solches unter die erste Classe, und die in der Tabelle in der ersten Reihe treffende Zahl als Wurzel wie bey dem Quotienten an, so ist die erstere a^2, letztere a (§. 120.); ferner ziehe man das gefundene Quadrat von den Ziffern der ersten Klasse ab (§. 123. 1.)

3. Zu dem Rest schreibe man die folgende Classe, setze das letzte Ziffer vom Duplo des gefundenen ersten Theiles der Wurzel unter das erste Ziffer der neuen Classe, und dividire damit, schreibe den Quotienten, als den zweyten Theil neben dem ersten gefundenen, und zugleich unter das letzte Ziffer der neuen Classe;

4. Multiplicire mit eben diesem zweyten Theil, sowohl den doppelten ersten um 2ab, als den zweyten selbst um b^2 (§. 120) zu bekommen, so erhalten beyde Producte zugleich ihre treffende Stellen (§. 123. I.)

5. Ziehe endlich diese Producte ab, bleibt kein Rest, so ist die Wurzel ausgezogen (§. 120).

I. Beyspiel. $\begin{array}{r|l} 5|76 & \begin{array}{l}(a+b\\ 2\ \ 4\end{array}\\ a^2 = 4 & \\ \hline 176 & \\ (2a+b) = 44 & \\ 2ab+b^2 = 176 & \\ \hline \end{array}$

II. Beyspiel. $\begin{array}{r|l} 34|81 & \begin{array}{l}59\end{array}\\ a^2 = 25 & \\ \hline 981 & \\ (2a+b) = 109 & \\ 2ab+b^2 = 981 & \\ \hline \end{array}$

Mithin ist $\sqrt{576} = 24$; und $\sqrt{3481} = 59$.

§. 125.

Aufgabe:

Aus einer ganzen Zahl von einer beliebigen Anzahl Ziffern die Quadratwurzel auszuziehen.

Auf-

Auflösung:

1. Man theile die gegebene Zahl von der Rechten zur Linken in Classen zu zweyen Ziffern, so besteht die Wurzel aus so vielen Ziffern, als man Classen hat (§. 122. Zus.)

2. Man bestimme aus der ersten und zweyten höchsten Classe nach §. 124. die ersten zwey Ziffern der Wurzel.

3. Zu dem Reste setze man die folgende Classe, betrachte die beyden Ziffern der Wurzel als den ersten Theil, so enthält der Rest samt der neuen Classe das doppelte Product dieses Theiles in den folgenden, und das Quadrat des folgenden Theiles (§. 123. II.) man schreibe also das Doppelte der bisher gefundenen Wurzel als Divisor so an, daß sein niedrigstes Ziffer unter dem ersten Ziffer der neuen Classe zu stehen kömmt, und bestimme wieder nach §. 124 N. 3—5) den folgenden Theil der Wurzel.

4. Zu dem bleibenden Reste setze man wieder die folgende Classe (§. 123. III.) und verfahre auf die nemliche Art.

5. Diese Operation wird so lange fortgesetzet, bis man alle Classen der gegebenen Zahl erschöpfet hat.

6. Ist an irgend einer Stelle der Rest sammt der folgenden Classe kleiner als die Zahl die man erhält, wenn man den Ziffern vom Duplo der bisher gefundenen

denen Wurzel am Ende 1 beygefügt, so setze man in die Wurzel dafür 0, füge sogleich dem Reste die der nachfolgenden Classe bey, und verfahre wieder nach N. 3.

I. Beyspiel.

$7^{1}\,3\,|\,2\,7\,|\,3\,6$ { 8 5 6

6 4

$a^2 = 9\,2\,7$

$(2a+b) = 1\,6\,5$

$2ab+b^2, = 8\,2\,5$

$1\,0\,2\,3\,6$

$(2a+b) = 1\,7\,0\,6$

$2ab+b^2 \quad 1\,0\,2\,3\,6$

II. Beyspiel.

$3^{1}3\,|\,0\,3\,|\,9\,5\,|\,0\,4$ { 5 7 4 8

$a^2 = 2\,5$

$8^{1}0^{1}3$

$(2a+b) = 1\,0\,7$

$2ab+b^2 = 7\,4\,9$

$5\,4\,9\,5$

$(2a+b) = 1\,1\,4\,4$

$2ab+b^2 = 4\,5\,7\,6$

$9\,1\,9$

(2ab

$$
\begin{array}{rcl}
 & & 91904 \\
(2a+b) & = & 11488 \\
2ab+b^2 & = & 91904 \\
\hline
 & & 0
\end{array}
$$

Folglich ist $\sqrt{}732736 = 856$; $\sqrt{}33039504 = 574$

I. Zusatz. Wenn man aus einer gegebenen ganzen Zahl A die Quadratwurzel zieht, so giebt das Product der gefundenen Wurzel n mit sich selbst oder n^2, und im Falle ein Rest R bleibt, die Summe derselben die gegebene Zahl wieder, oder $A = n^2 + R$; denn beym Ausziehen der Quadratwurzel hat man von A nach und nach alle Theile des Quadrates der gefundenen Wurzel subtrahirt, d. i. $A - n^2 = R$; mithin ist $A = n^2 + R$ (§. 29. I. Zus.)

II. Zusatz: Wenn die gefundene Zahl n die Quadratwurzel aus A seyn soll, so muß der Rest R kleiner als das um 1 vermehrte Duplum der Zahl n seyn, oder $R < 2n + 1$; denn $A = n^2 + R$; wäre nun $R = 2n + 1$; so müßte

$A = n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$ seyn; mithin $\sqrt{}A = n+1$ (§. 94. a.); dieses folget um so mehr, wenn $R > 2n+1$ seyn sollte.

III. Zusatz: Wenn beym Ausziehen der Quadratwurzel aus einer ganzen Zahl A ein Rest bleibt, so ist die Quadratwurzel oder $\sqrt{}A$ eine Irrationalzahl (§. 98. Zusatz).

§. 126.

Aufgabe:

Aus einer ganzen Zahl, deren Quadratwurzel keine ganze Zahl, mithin eine Irrationalzahl ist, diese Wurzel durch Annäherung zu bestimmen.

Auflösung:

Man hänge der gegebenen Zahl A so viele Paare Nullen an, als man Decimalstellen von der Wurzel verlangt, und verfahre nun wie mit ganzen Zahlen, am Ende aber setze man in der gefundenen Wurzel von der Rechten zur Linken das Comma nach so vielen Ziffern, als man Paare von Nullen beygefüget hat.

Beweis:

Hat man ein Paar Nullen genommen, so ist offenbar $\sqrt{A} = \sqrt{\frac{A.100}{100}} = \frac{\sqrt{A.100}}{10}$, das ist, man kann aus dem Zähler, oder aus der um zwey Nullen vermehrten Zahl wie aus einer ganzen Zahl die Wurzel ziehen, nur muß man am Ende die Einheit mit halb so viel Nullen in den Nenner setzen, oder in der gefundenen Wurzel so viele Decimalstellen abschneiden, als man Paare von Nullen der Zahl A anhieng (§. 87. II. Zus.)

Allgemein ist $\sqrt{A} = \sqrt{\frac{A.10^{2n}}{10^{2n}}} = \frac{\sqrt{A.10^{2n}}}{10^n}$ (§. 97 I. Zus. §. 105. I. Zus.)

Beyſpiel: 3 0 0 [1,7 3 2 0 5 0 8

1

2 0 0

2 7

1 8 9

1 1 0 0

3 4 3

1 0 2 9

7 1 0 0

3 4 6 2

6 9 2 4

1 7 6 0 0 0 0

3 4 6 4 0 5

1 7 3 2 0 2 5

2 7 9 7 5 0 0 0 0

3 4 6 4 1 0 0 8

1 7 7 1 2 8 0 6 4

2 6 2 1 9 3 6

Mithin iſt die Wurzel $\sqrt{3} = 1,7320508\ldots$

V Abschnitt.

Vom Cubus und der Cubikwurzel vieltheiliger Größen.

§. 127.

Lehrsatz:

Der Cubus einer zweytheiligen Größe besteht aus dem Cubus des ersten Theiles, dem dreyfachen Producte vom Quadrate des ersten in den zweyten Theil, dem dreyfachen Producte des ersten in das Quadrat des zweyten Theiles, dem Cubus des zweyten Theiles, d. i.

I. $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

II. $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

Beweis I.

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ (§. 120.)

$a + b = a + b$

$a^3 + 2a^2b + ab^2$

$+ a^2b + 2ab^2 + b^3$

$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ (§. 92)

Eben so ist II. $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$a - b = a - b$

$a^3 - 2a^2b + ab^2$

$- a^2b + 2ab^2 - b^3$

Folglich $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$.

I. Zusatz:

I. Zusatz: Die Formel II. läßt sich aus I. unmittelbar finden, wenn man in selber den zweyten Theil negativ nimmt, mithin läßt sich eine Summe sowohl, als die Differenz zweyer Größen zum Cubus erheben, ohne daß man sie mit sich selbst dreymal multipliciren muß. z. B.

$(12)^3 = (10+2)^3 = 1000+600+120+8 = 1728$

$(8)^3 = (10-2)^3 = 1000-600+120-8 = 512$

II. Zusatz: Drey und mehrtheilige Größen lassen sich nach dem nemlichen I. Formular zum Cubus erheben; denn

$$(p+q+r)^3 = p^3+3p^2q+3pq^2+q^3+3p^2r+6pqr+3q^2r+3pr^2+3qr^2+r^3$$
$$= (p^3+3p^2q+3pq^2+q^3) + (3p^2r+6pqr+3q^2r) + (3pr^2+3qr^2) + r^3$$
$$= (p+q)^3+3(p+q)^2r+3(p+q)r^2+r^3$$

Man erhebe nemlich die ersten zwey Theile der gegebenen Größe nach dem I. Formular zum Cubus, nehme die beyden ersten Theile zusammen, oder setze $p+q=a$; so ist $(p+q)^3=a^3$; man bestimme also aufs neue $3a^2b+3ab^2+b^3$; Hat die Größe noch mehrere Theile, so verfahre man immer auf die nemliche Art.

III. Zusatz: Soll man aus einer gegebenen mehrtheiligen Größe A die Cubikwurzel ziehen, so muß sie unter dem Formular I enthalten seyn, mithin alle ihre Theile begreiffen, ist nun die Größe A so beschaffen, so heißt sie ein **vollkommener Cubus**, im Gegentheile ein **unvollkommener.**

§. 128.

§. 128.

Aufgabe:

Aus mehrtheiligen Größen in der Buchstabenrechnung die Cubikwurzel auszuziehen.

Auflösung:

1. Man ordne die Theile nach einer Größe so, daß ihr Cubus am ersten, das Quadrat am zweyteu, die einfache Größe am dritten, jene Theile, wo diese Größe nicht mehr vorkömt, am vierten Platze zu stehen kommen.

2. Man ziehe von der Größe an der ersten Stelle die Cubikwurzel aus, setze solche als den ersten Theil = a, und ziehe den Cubus dieser gefundenen Größe ab.

3. Nun nehme man das dreyfache Quadrat des gefundenen ersten Theiles oder $3a^2$, und dividire mit solchen den Rest, so ist der Quotient der 2te Theil b der Cubikwurzel.

4. Mit diesem Quotienten multiplicire man das dreyfache Quadrat des ersten Theiles, um $3a^2b$ zu bekommen, ferner nehme man das Quadrat des zweyten in den dreyfachen ersten Theil oder $3ab^2$, endlich den Cubus des zweyten Theiles oder b^3, und subtrahire die Summe derselben vom obigen Reste, hebt sich nun alles auf, so sind die zwey gefundenen Größen a und b die Cubicwnrzel.

5. Bleibt aber ein Rest, so nehme man die beyde gefundenen Theile für einen = a; wiederhole das Verfahren

fahren von N. 3 und 4 (§. 127. II. Zuf.), dieſes ſetze man ſo lange fort, bis alle Theile der gegebenen Größe erſchöpfet ſind.

6. Enthielte die gegebene Größe kein vollkommenes Quadrat, ſo ſuche man ſich durch das Verfahren N. 5. der wahren Wurzel ſo weit zu nähern, als es die Umſtände erheiſchen.

I. Beyſpiel.

$$\sqrt{27c^3 + 54c^2d + 36cd^2 + 8d^3} \left\{ 3c + 2d \right.$$

$a^3 = 27c^3$

$3a^2 = (27c^2)$

$3a^2b = 54c^2d$

$3ab^2 = + 36cd^2$

$b^3 = + 8d^3$

$3a^2b + 3ab^2 + b^3 = 54c^2d + 36cd^2 + 8d^3$

Folglich iſt $\sqrt[3]{(27c^3 + 54c^2d + 36cd^2 + 8d^2)} = 3c + 2d$

II. Beyſpiel.

$$8x^6 + 12x^5 - 30x^4 - 35x^3 + 45x^2 + 27x - 27 \mid 2x^2 + x - 3$$

$a^3 = 8x^6$

$3a^2 = - (12x^4)$

$3a^2b = 12x^5$

$3ab^2 = + 6x^4$

$b^3 = + x^3$

$3a^2b + 3ab^2 + b^3 = 12x^5 + 6x^4 + x^3$

$-36x^4 - 36x^3 + 45x^2 + 27x - 27$

$3a^2$

$$-36x^4-36x^3+45x^2+27x-27$$

$$3a^2 = (12x^4+12x^3+3x^2)$$

$$3a^2b = -36x^4-36x^3-9x^2$$

$$3ab^2 = +54x^2+27x$$

$$b^3 = -27$$

mithin

$$3a^2b+3ab^2+b^3 = -36x^4-36x^3+45x^2+27x-27$$

$$+ \quad + \quad - \quad - \quad +$$

Folglich ist

$$\sqrt[3]{(8x^6+12x^5-30x^4-35x^3+45x^2+27x-27)} = 2x^2+x-3$$

§. 129.

Lehrsatz:

Die Anzahl der Ziffern im Cubus ist

I. nie größer als die dreyfache Anzahl der Ziffern der Wurzel, und

II. nie kleiner als diese dreyfache Anzahl weniger zwey.

Beweis von I.

1. Es ist offenbar (§. 122. I.)

$10 > 8$ mithin $1000 > 8^3$

$100 > 89$ $1000000 > 89^3$

$1000 > 879$ $1000000000 > 879^3$

2. Da nun 1000 die kleinste Zahl mit vier Ziffern ist, so kann 8^3 oder der Cubus eines Ziffers nicht mehr als drey Ziffern haben; eben so kann 89^3 oder der Cubus einer Zahl von zwey Ziffern höchstens 6 Ziffern,

$$(a+b)^m = a^m + \frac{m}{1}a^{m-1}b + \frac{(m.(m-1)}{1.\ 2}a^{m-2}b^2$$

$$= a^m + A\,a^{m-1}b + \qquad B\,a^{m-2}b^2$$

$$\times (a+b)$$

$$(a+b)^{m+1} = a^{m+1} + A\left\{a^{m-1}b + B\right.^{a}$$

$$+1\left\{\qquad\qquad + A\right.$$

=

11. Ve

111. Tab

Dinge.	Permutationen.
a	a.
b	ba, ab.
c	cba, bca, bac; cab, acb, abc.
d	dcba, cdba, cbda, cbad; dbca, dbac, bdac, badc, bacd; dcab, dacb, adcb, acdb, acbd; dabc,

Dinge.	Amben.	T
a	o	o
b	ab	o
c	ac, bc	abc
d	ad, bd, cd	abd, acd, bcd
e	ae, be, ce, de	abe, ace, bce,

fern, und 879^3 oder der Cubus von einer Zahl mit drey Ziffern höchstens 9 Ziffern haben, mithin die dreyfache Anzahl nicht übersteigen.

3. Allgemein ist:

$10^n > 873\ldots.n$ mithin $10^{3n} > (873\ldots.n)^3$

Nun ist 10^{3u} die kleinste Zahl mit $3n+1$ Ziffern, folglich wenn die Wurzel n Ziffern hat, so kann der Cubus davon höchstens 3n Ziffern, oder die dreyfache Anzahl enthalten.

Beweis von II.

$1 < 3$ folglich $1 < 3^3$

$10 < 23$ $1000 < 23^3$

$100 < 232$ $1000000 < 232^3$

2. Da nun 1 die kleinste Zahl mit einem Ziffer, 1000 die kleinste Zahl mit 4 Ziffern, 1000000 die kleinste mit 7 Ziffern ist, so kann 3^3 oder der Cubus einer Ziffer nicht wenig als 3—2 das ist ein Ziffer; 23^3 oder der Cubus 2 von zwey Ziffern nicht weniger als 6—2, das ist vier Ziffern, und 232^3 oder der Cubus einer Zahl von 3 Ziffern nicht weniger als 9—2 das ist, sieben Ziffern haben.

3. Allgemein ist

$10^{n-1} < 232\ldots.n$, also $10^{3n-3} < (232\ldots.n)^3$

Da aber 10^{3n-3} die kleinste Zahl von $3n-2$ Ziffern ist, so muß $(232\ldots.n)^3$ oder der Cubus einer Zahl von n Ziffern wenigst $3n-2$ Ziffern enthalten.

Zusatz:

Zusatz:

Wenn man eine gegebene ganze Zahl von der Rechten zur Linken in Classen zu drey Ziffern theilet, da also die erste Classe Rechts drey, zwey, oder auch nur ein Ziffer haben kann, so besteht die Cubikwurzel aus so vielen Ziffern, als man Klassen hat; denn die Zahl enthalte n Classen, so besteht sie aus 3n, oder 3n—1, oder 3n—2 Ziffern, in allen drey Fällen ist die Anzahl der Ziffern der Cubikwurzel n, so groß nemlich als die Anzahl der Klassen.

§. 130.

Lehrsatz:

Wenn eine ganze Zahl, aus der man die Cubikwurzel ziehen soll, aus 4 oder mehrern Ziffern besteht, so ist, wenn man sie in Klassen (§. 129. Zus.) theilet, und sie sowohl als die Ziffern von der Linken zur Rechten zählet,

I. das letzte Ziffer vom Cubus des ersten Theiles der Wurzel oder a^3 im letzten Ziffer der ersten Classe, jenes von $3a^2b$ im ersten, von $3ab^2$ im zweyten, und von b^3 im letzten Ziffer der folgenden Classe enthalten.

II. Setzt man die beyden gefundenen ersten Theile der Wurzel $= a$ (§. 127. II. Zus.), so ist wieder das letzte Ziffer von $3a^2b$ im ersten, von $3ab^2$ im zweyten, von b^3 im letzten Ziffer der folgenden Classe enthalten.

III. Ueber=

III. Ueberhaupt wenn man die schon gefundenen Theile der Cubikwurzel = a setzet, so ist allemal das niedrigste Ziffer von $3a^2b$ im ersten, von $3ab^2$ im zweyten, von b^3 im dritten Ziffer der darauf folgenden nächsten Classe enthalten.

Beweis von I.

Es enthalte die gegebene Zahl m + 1 Classen, so besteht die Wurzel aus eben so vielen Ziffern, das erste oder höchste davon z. B. f ist von der Ordnung m, oder $a = f. 10^m$; und das darauf folgende $b = g\ 10^{m-1}$, mithin ist $a^3 = f^3. 10^{3m}$

$3a^2b = 3f^2. 10^{2m}. g. 10^{m-1} = 3f^2g\ 10^{3m-1}$;

$3ab^2 = 3f. 10^m. g^2. 10^{2m-2} = 3fg^2 10^{3m-2}$; endlich

$b^3 = g^3. 10^{3m-3}$, wo wieder f und g die Ziffern ohne Localwerth ausdrücken;

Nun hat das letzte Ziffer der ersten Classe m Classen oder 3 m Ziffern nach sich, ist also wie a^3 von der Ordnung 10^{3m}; das nemliche läßt sich leicht von den Ziffern der folgenden Classe darthun; das erste ist nemlich von der Ordnung 3m—1, das zweyte von der Ordnung 3m—2; und das letzte von der Ordnung 3m—3.

Beweis von II.

Setzet man die gefundenen beyden ersten Theile für einen gleich a, so ist das niedrigste Ziffer der Ordnung m — 1, oder $a = h. 10^{m-1}$, mithin das darauf folgende oder $b = i. 10^{m-2}$, folglich wie-

der

der $3a^2b = 3h^2 . 10^{2m-2} . i . 10^{m-2} = 3h^2 i\, 10^{3m-4}$;

ferner $3ab^2 = 3h10^{m-1} . i^2 10^{2m-4} = 3hi^2 10^{3m-5}$.

Endlich $b^3 = i^3 10^{3m-6}$, woraus man leicht wie I. die Wahrheit des Satzes einsieht.

Beweis von III.

Nimmt man nun überhaupt die schon gefundenen Theile der Wurzel für a, so ist das niedrigste Ziffer desselben von der so vielten Ordnung, als die gegebene Zahl noch Classen enthält z. B. n; mithin

$a = p . 10^n$; also $b = q10^{n-1}$

und $3a^2b = 3p^2 10^{2n} . q10^{n-1} = 3p^2q\, 10^{3n-1}$

$3ab^2 = 3p10^n . q^2 10^{2n-2} = 3pq^2\, 10^{3n-2}$

$b^3 = q^3 10^{3n-3}$, woraus ebenfalls die Wahrheit des Satzes leicht eingesehen wird.

§. 131.

Aufgabe:

Aus einer Zahl von 4 bis 6 Ziffern die Cubikwurzel auszuziehen.

Auflösung:

1. Man theile die gegebene Zahl von der Rechten zur Linken in Classen zu drey Ziffern, so enthält die Cubikwurzel so viele Ziffern, als man Classen hat, (§. 129. Zus.) in gegenwärtigen Fällen also zwey;

2. Nun nehme man aus der Tabelle §. 93. jenen Cubus, welcher der Zahl von der ersten Classe links gezählet

zählet, gleich, oder zunächst kleiner ist, und setze solche unter die erste Classe, als den Cubus des ersten Theiles, oder a^3, und die in der obersten Spalte der Tabelle treffende Zahl als die Wurzel, oder a nach einem Rechts gezogenen Striche (§. 130. I.), ziehe den gefundenen Cubus des ersten Theiles der Wurzel oder a^3 von den Ziffern der ersten Classe ab, und

3. setze zu dem Reste die Ziffern der zweyten Classe.

4. Man schreibe das dreyfache Quadrat des ersten Theiles oder $3a^2$ als Divisor so darunter, daß dessen niedrigstes Ziffer unter das erste oder höchste Ziffer der zweyten Klasse zu stehen kömt, und setze den Quotienten als den zweyten Theil der Wurzel oder b nach dem vorhergefundenen Ziffer oder a.

5. Nun bestimme man $3a^2b$, $3ab^2$, b^3, und setze das niedrigste Ziffer vom erstern unter das erste Ziffer der zweyten Classe, von $3ab^2$ unter das zweyte, von b^3 unter das dritte oder letzte Ziffer dieser zweyten Classe (§ 130. I) und addire sie zusammen,

6. Ziehe endlich die Summe ab, im Falle nun kein Rest bleibt, so ist die gefundene Zahl die verlangte Cubikwurzel. (§ 127)

I. Beyspiel:

$$\begin{array}{r|l|l} & 9\,|\,2\,6\,1 & a+b \\ a^3 = & 8 & 2\,1 \\ \hline & 1\,2\,6\,1 & \\ 3\,a^2 = & (1\,2) & \\ 3\,a^2\,b = & 1\,2 & \\ 3\,a\,b^2 = & 6 & \\ b^3 = & 1 & \\ \hline & & \end{array}$$

$$3\,a^2\,b + 3\,a\,b^2 + b^3 = 1\,2\,6\,1$$

II. Beyspiel:

$$\begin{array}{r|l|l} & 1\,4\,0\,|\,6\,0\,8 & a+b \\ a^3 = & 1\,2\,5 & 5\,2 \\ \hline & 1\,5\,6\,0\,8 & \\ 3\,a^2 = & (7\,5) & \\ 3\,a^2\,b = & 1\,5\,0 & \\ 3\,a\,b^2 = & 6\,0 & \\ b^3 = & 8 & \\ \hline & & \end{array}$$

$$3\,a^2\,b + 3\,a\,b^2 + b^3 = 1\,5\,6\,0\,8$$

Folglich ist I. $\sqrt[3]{92611} = 21$; und II. $\sqrt[3]{140608} = 52$

§. 132.

Aufgabe:

Aus einer gegebenen Zahl, die mehr als 6 Ziffern enthält, die Cubikwurzel auszuziehen.

Auf=

Auflösung:

1. Man theile die gegebene Zahl von der Rechten zur Linken in Classen zu drey Ziffern, so besteht die Wurzel aus eben so vielen Ziffern, als man Classen bekömt (§. 129. Zus.)

2. Man bestimme aus den ersten oder höchsten zwey Classen nach §. 131 die ersten zwey Ziffern der Wurzel,

3. Setze zum Reste die dritte Classe, und nehme die beyden Ziffern der Wurzel als den ersten Theil (§. 130. II.), und bestimme wieder nach §. 131. No. 4—6 das folgende Ziffer der Wurzel.

4. Auf die nemliche Art werden alle übrige Ziffern der Wurzel gefunden (§. 130 III.), bis alle Classen der gegebenen Zahl erschöpfet sind.

5. Ist an irgend einer Stelle der Rest sammt der folgenden Classe so beschaffen, daß wenn man $b = 1$ nimmt, solche doch kleiner als $3a^2b + 3ab^2 + b^3$ sind, so schreibe man für b eine Nulle, und setzet sogleich eine neue Classe zur vorigen, und bestimme wieder nach No. 3. das folgende Ziffer der Wurzel;

6. Bleibt nun kein Rest, so ist die gefundene Zahl die verlangte Cubikwurzel.

I. Beyspiel:

$$\begin{array}{r|l} 3\ 4\ 0\ 1\ 2\ 2\ 2\ 4 & 3\ 2\ 4 \\ a^3 = 2\ 7 & \\ \hline 7\ 0\ 1\ 2 & \\ 3a^2 = (2\ 7) & \\ 3a^2b = 5\ 4 & \\ 3ab^2 = 3\ 6 & \\ b^3 = 8 & \\ \hline 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = 5\ 7\ 6\ 8 & \\ \hline 1\ 2\ 4\ 4\ 2\ 2\ 4 & \\ 3a^2 = (3\ 0\ 7\ 2)\ (a = 32.\ K.\ 3.) & \\ 3a^2b = 1\ 2\ 2\ 8\ 8 & \\ 3ab^2 = 1\ 5\ 3\ 6 & \\ b^3 = 6\ 4 & \\ \hline 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = 1\ 2\ 4\ 4\ 2\ 2\ 4 & \\ \hline \end{array}$$

Mithin ist $\sqrt[3]{3\ 4\ 0\ 1\ 2\ 2\ 2\ 4} = 3\ 2\ 4$

II. Beyspiel.

II. Beyspiel.

$$27\,|\,543\,|\,608\,[\,302$$

$a^3 = 27$

$$543608$$

$3a^2 = (2700)$ $(a = 30$ Nro. 3 u. 5.)

$3a^2b = 5400$!

$3ab^2 = 360$

$b^3 = 8$

$3a^2b + 3ab^2 + b^3 = 543608$

Folglich ist $\sqrt[3]{27543608} = 302$.

I. Zusatz: Wenn man aus einer ganzen Zahl A die Cubikwurzel zieht, so giebt die gefundene Zahl n dreymal mit sich selbst multiplicirt, und im Falle ein Rest R bleibt, die Summe derselben die gegebene Zahl wieder, oder $n^3 + R = A$; denn beym Ausziehen der Cubikwurzel hat man alle Theile des Cubus der gefundenen Wurzel (§. 127) abgezogen mithin ist $A - n^3 = R$, und $A = n^3 + R$ (§. 29 I. Zus.)

II. Zusatz: Wenn die gefundene ganze Zahl n die Cubikwurzel aus A seyn soll, so muß der Rest oder $R < 3n^2 + 3n + 1$ seyn, denn

$A = n^3 + R$; wäre nun $R = 3n^2 + 3n + 1$; so müßte

$A = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 = (n+1)^3$ seyn, mithin auch

$\sqrt[3]{A} = n + 1$ (§. 94. a), welches um so mehr erfolget, wenn $R > 3n^2 + 3n + 1$ ist.

III. Zusatz: Wenn beym Ausziehen der Cubikwurzel von der ganzen Zahl A am Ende ein Rest bleibt, so ist die Cubikwurzel oder $\sqrt[3]{A}$ eine Irrationalzahl (§. 98. Zus.)

§. 133.

Aufgabe:

Aus einer ganzen Zahl, deren Cubikwurzel irrational ist, solche durch Annäherung zu bestimmen.

Auflösung:

Man hänge der gegebenen Zahl A so viel Classen von Nullen an, als man Decimalziffern der Wurzel bestimmen will, und verfahre wie bey ganzen Zahlen, am Ende setzet man in der gefundenen Wurzel das Comma von der Rechten zur Linken nach so viel Ziffern, als man Classen von Nullen beygefüget hat.

Beweis:

Es sey die Anzahl der Classen $= n$, mithin der angehängten Nullen $= 3n$; so ist offenbar

$$\sqrt[3]{A} = \sqrt[3]{\frac{A.\ 10^{3n}}{10^{3n}}} = \frac{\sqrt[3]{A.\ 10^{3n}}}{10^n}$$ (§. 97. I. Zus. §. 105. I. Zus.)

Folglich

Folglich kann man aus dem Zähler, d. i. aus der durch angehängte Nullen vermehrten Zahl die Wurzel wie gewöhnlich ausziehen, nur muß man am Ende als Nenner die Einheit mit so viel Nullen setzen, oder so viele Decimalstellen abschneiden (§. 87. II Zus.) als man Classen von Nullen der Zahl A beyfügte.

Beyspiel:

3 { 1,44224.....
1 {

2000
(3)
12
48
64

1744

256000
(588)
2352
672
64

241984

14016

f 2 14,016000

1 4 0 1 6 0 0 0
(6 2 2 0 8)
1 2 4 4 1 6
1 7 2 8
8

1 2 4 5 8 8 8 8

1 5 5 7 1 1 2 0 0 0
(6 2 3 8 0 9 2)
1 2 4 7 6 1 8 4
1 7 3 0 4
8

1 2 4 7 7 9 1 4 4 8

3 0 9 3 2 0 5 5 2 0 0 0
(6 2 3 9 8 2 2 5 2)
2 4 9 5 9 2 9 0 0 8
6 9 2 2 5 6
6 4

2 4 9 5 9 9 8 2 3 4 2 4

5 9 7 2 0 7 2 8 5 7 6

Folglich $\sqrt{3} = 1,44224\ldots$

Zusatz:

Irrationalzahlen lassen sich durch Annäherung auf Rationalzahlen bringen. (§. 126)

VI. Abschnitt.

Vom binomischen Lehrsatze.

§. 134.

Erklärung:

Jener Lehrsatz, der die Gesetze für jede Potenz einer zweytheiligen Größe angiebt, heißt der **binomische Lehrsatz** (Theorema binomiale), oder auch der Newtoniamische Lehrsatz, weil man gewöhnlich Newton für den Erfinder desselben angiebt.

§. 135.

Allgemeine Gesetze für jede Potenz m einer zweytheiligen Größe a + b.

I Wenn der Exponent m eine ganze positive Zahl bezeichnet, so ist die Reihe der Glieder, woraus die Potenz besteht, endlich, und enthält m + 1 Glieder, d. i. um ein Glied mehr, als der Exponent Einheiten hat: ist hingegen der Exponent keine ganze positive Zahl, so ist die Reihe unendlich. (§. 110. c.)

II Jedes Glied der Reihe ist ein Product aus 3 Factoren, nemlich einer Potenz von a, einer Potenz b, und einer Zahl, oder dem Coefficienten.

III Der Exponent von a im ersten Gliede ist der Exponent der verlangten Dignität selbst, oder = m; dieser Exponent nimmt in jedem folgenden Gliede um 1 ab, bis er im letzten Gliede, wenn die Reihe endlich ist, Null wird.

IV Der Exponent vom zweyten Theile b ist im ersten Gliede = o, und wächst in jeden folgenden Gliede immer um 1, bis er im letzten Gliede bey einer endlichen Reihe dem Exponenten m der Dignität gleich wird.

V Der Coefficient des ersten Gliedes ist allemal = 1. in allen folgenden Gliedern aber ein Bruch, dessen Zähler ein Product aller Exponenten von a in den vorhergehenden Gliedern, und dessen Nenner ebenfalls ein Product so vieler in natürlicher Ordnung fortlaufender Zahlen ist, als Glieder vorangehen.

I Zusatz: Nachstehende Formel stellt jede Potenz einer zweytheiligen Größe wie jenes mit * bezeichnete Glied das allgemeine Glied dar:

$$(a+b)^m = a^m + \frac{m}{1}a^{m-1}b + \frac{m.(m-1)}{1.2}a^{m-2}b^2 +$$

$$\frac{m.(m-1).(m-2)}{1.2.3}a^{m-3}b^3 + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots + \frac{m.(m-1)\ldots(m-(n-3))}{1.2\ldots(n-2)}a^{m-(n-2)}b^{n-2}$$

$$+ * \frac{m.(m-1)\ldots(m-(n-3)).(m-(n-2))}{1.2\ldots(n-2).(n-1)}$$

$$a^{m-(n-1)}b^{n-1} + \ldots\ldots\ldots$$

II. Zu-

II Zusatz: Wenn der Exponent m eine Rationalzahl ist, so kann er entweder eine ganze oder gebrochene Zahl, und in beyden Fällen entweder positiv, oder negativ seyn; mithin läßt sich der binomische Lehrsatz für rationale Exponenten auf vier besondere Lehrsätze zurückführen.

§. 136.

Lehrsatz:

Jede Potenz einer zweytheiligen Größe, deren Exponent eine positive ganze Zahl ist, wird durch die Gesetze § 135 bestimmt, d. i.

$$(a+b)^m = a^m + \frac{m}{1}a^{m-1}b + \frac{m.(m-1)}{1.\ 2}a^{m-2}b^2 +$$

$$\frac{m.(m-1)\ (m-2)}{1.\ 1.\ 2.\ 3}a^{m-3}b^3 + \ldots\ldots$$

$$\ldots + \frac{m.(m-1)\ldots(m-(n-3))}{1.\ 2\ldots\ldots\ (n-2)}a^{m-(n-2)}b^{n-2}$$

$$+ \frac{m.(m-1)\ldots\ldots(m-(n-3))\ (m-(n-2))}{1.\ 2\ldots\ (n-2).\ (n-1)}$$

$$a^{m-(n-1)}b^{n-1} + \ldots\ldots\ldots + b^m$$

Beweis:

1. Man multiplicire die zweytheilige Größe $a+b$ mehrmal z. B. siebenmal mit sich selbst, so erhält man nachstehende Tabelle für die ersten 7 Dignitäten:

$a+b$

$a+b$

$a^2+2ab+b^2$

$a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

$a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$

$a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5$

$a^6+6a^5b+15a^4b^2+20a^3b^3+15a^2b^4+6ab^5+b^6$

$a^7+7a^6b+21a^5b^2+35a^4b^3+35a^3b^4+21a^2b^5+7ab^6+b^7$

2. Bey allen diesen Potenzen läßt sich leicht einsehen, daß sie nach den Gesetzen §. 135 bestimmet sind, denn man setze z. B. von der 7ten Potenz die Factoren abgesondert untereinander:

$a^7 , a^6 , a^5 , a^4 , a^3 , a^2 , a^1 , a^0$

$b^0 , b^1 , b^2 , b^3 , b^4 , b^5 , b^6 , b^7$

$1 , 7 , 21 , 35 , 35 , 21 , 7 , 1$

So enthält die Reihe 8 Glieder §. 135 Nr. I; jedes Glied ist ein Product aus 3 Factoren Nr. II, die Exponenten sind nach Nr. III und IV bestimmet; endlich ist der Coefficient des ersten Gliedes $= 1$; und $7 = \frac{7}{1}$; $21 = \frac{7.6}{1.2}$; $35 = \frac{7.6.5}{1.2.3}$ u. s. f. folglich dem Gesetze Nr. V. gemäß.

3 Um nun den Satz für alle höhere Dignitäten zubeweisen, dient nachstehender Vernunftschluß:

Wenn die §. 135 angeführten Gesetze für irgend eine Dignität, deren Exponent m heißen mag, gelten, so gelten sie auch noch für die nächst höhere $m+1$:

Nun

Nun aber gelten sie für die ersten 7 Potenzen, als für $m = 7$; folglich auch für $m + 1$ oder die 8te Dignität. Setzet man wieder $m = 8$, so folgt ihre Giltigkeit für die 9te, und so immer für die nächst höhere; mithin allgemein.

4 Um nun den hypothetischen Obersatz zu beweisen, nehmet man für irgend eine Potenz m die Formel Tab. I als geltend an;

5 Drücke, um sie abzukürzen, die Coefficienten indessen durch A. B. u. s. f. aus.

6 Multiplicire solche mit der Wurzel $a + b$, so erhält man die nächst höhere Dignität $m + 1$.

7 Betrachtet man diese durch die Multiplication erhaltene neue Reihe, so ist durch sie der hypothetische Obersatz Nr. 3 erwiesen, denn

8 Sie enthält um ein Glied mehr, als die vorige; bestand also letztere aus $m + 1$ Gliedern, so enthält die neue $m + 2$ Glieder §. 135 Nr. I.

9 Jedes Glied ist wieder ein Product aus 3 Factoren nach Nr. II.

10 Die Exponenten von a und b sind den Gesetzen Nr. III u. IV gemäß.

11 Der Coefficient des ersten Gliedes ist gleich 1, und die folgenden sind ebenfalls durch das Gesetz Nr. V bestimmt, denn

$$A+1=m+1=\frac{m+1}{1}$$

$$A+B=\frac{m}{1}+\frac{m.(m-1)}{1.2}=\frac{m}{1}.\left(1+\frac{m-1}{2}\right)=\frac{m}{1}.\frac{2+m-1}{2}$$

$$=\frac{(m+1)m}{1.\ 2.}$$

$$B+C=\frac{m.(m-1)}{1.\ 2}.\frac{m.(m-1).(m-2)}{1.\ 2.\ 3.}=\frac{m.(m-1)}{1.\ 2.}.$$

$$\left(1+\frac{m-2}{3}\right)=\frac{m.(m-1)}{1.\ 2}.\frac{m+1}{3}=\frac{(m+1)m.(m-1)}{1.\ 2.\ 3}$$

Der Coefficient vom allgemeinen Gliede ist:

$$M+N=\frac{m.\ (m-1)\ .\ .\ .\ .\ .\ (m-(n-3))}{1.\ 2\ .\ .\ .\ .\ (n-2)}$$

$$+\frac{m.(m-1)\ .\ .\ .\ .\ .\ (m-(n-3)).\ (m-(n-2))}{1.\ 2\ .\ .\ .\ (n-2)\ .\ (n-1)}$$

$$=\frac{m.(m-1)....(m-(n-3))}{1.\ 2\ .\ .\ .\ .\ (n-2)}.\left(1+\frac{m-n+2}{n-1}\right)(\S.34)$$

$$=\frac{m.(m-1)....(m-(n-3)}{1.\ 2\ \ ...\ (n-2)}\times\frac{m+1}{n-1}$$

$$=\frac{(m+1)m.(m-1)\ .\ .\ .\ .\ .\ (m-(n-3))}{1.\ 2.\ 3\ .\ .\ .\ \ n-1}$$

I. Zusatz: Da $a+b=a\left(1+\frac{b}{a}\right)$; so ist

$(a+b)^m=a^m\left(1+\frac{b}{a}\right)^m$ (§. 96). Drückt

man

man nun $\frac{b}{a}$ mit e aus, so ist nach dem binomi-

schen Lehrsatz. $(1 + e)^m = 1 + \frac{m}{1} e +$

$\frac{m.(m-1)}{1.\ 2} e^2 + \frac{m.(m-1).(m-2)}{1.\ 2.\ 3} e^3 + \ldots\ldots$

Und umgekehrt; ist die Giltigkeit dieser Formel allgemein erwiesen, so folgt jene für den binomischen Lehrsatz.

II Zusatz: Für einen gebrochenen positiven Exponenten, wenn man für m im II Zus. $\frac{m}{n}$ substituirt, erhält man:

$$(1+e)^{\frac{m}{n}} = 1 + \frac{m}{n} e + \frac{m.(m-n)}{1.\ 2n^2} e^2 + \frac{m.(m-n)(m-2n)}{1.\ 2\ .\ 3\, n^3} e^3 + \ldots\ldots$$

III Zusatz: Für einen negativen gebrochenen Exponenten erhält man durch ähnliche Substitution:

$$(1+e)^{-\frac{m}{n}} = 1 - \frac{m}{n} e + \frac{m.(m+n)e^2}{1.\ 2\, n^2} - \frac{m.(m+n)(m+2n)}{1.\ 2\ .\ 3\, n^3} e^3 + \ldots\ldots$$

IV Zusatz: Wenn der Exponent eine negative ganze Zahl ist, so verwandelt sich die Formel des II Zus. in nachstehende:

$(1+e)$ .....

$$(1+e)^{-m} = 1 - \frac{m}{1}e + \frac{m.(m-1)}{1.2}e^2 - \frac{m.(m-1)(m-2)}{1.2.3}e^3 + \ldots\ldots$$

§. 137.

Lehrsatz: Die Gesetze des binomischen Lehrsatzes gelten auch für Potenzen, deren Exponent eine positive gebrochene Zahl ist, oder wenn m und n ganze positive Zahlen sind, so ist (§. 136. II Zus.)

$$(1+e)^{\frac{m}{n}} = 1 + \frac{m}{n}e + \frac{m.(m-n)}{1.2\,n^2}e^2 + \frac{m.(m-n).(m-2n)}{1.2.3\,n^3}e^3 + \ldots\ldots$$

Beweis:

1. Man setze

$$p = \frac{m}{n}e + \frac{m.(m-n)}{1.2\,n^2}e^2 + \frac{m.(m-n)(m-2n)}{1.2.3\,n^3}e^3 + \ldots\ldots$$

2. $(1+e)^m = 1 + \frac{m}{1}e + \frac{m.(m-1)}{1.2}e^2 + \frac{m.(m-1)(m-2)}{1.2.3}e^3 + \ldots\ldots$ (§. 136. I Zus.)

3. $(1+p)^n = 1 + \frac{n}{1}p + \frac{n.(n-1)}{1.2}p^2 + \frac{n.(n-1)(n-2)}{1.2.3}p^3 +$

$\ldots\ldots$ (§ 136)

4. Nun

4. Nun ist nach Nr. 1. $p = \frac{m}{n}e + \frac{m(m-n)}{1.\ 2n^2}e^2 + \frac{m(m-n)}{1.\ 2}$

$\frac{(m-2n)}{3n^3}e^3 + \ldots\ldots$

also $p^2 = \frac{m^2}{n^2}e^2 + \frac{2m}{n}e \times \frac{m(m-n)}{1.\ 2n^2}e^3 +$

$= \frac{m^2e^2}{n^2} + \frac{m^2(m-n)}{n^3}e^3 + \ldots\ldots$

und $p^3 = \frac{m^3}{n^3}e^3 + \ldots$

Substituirt man diese Werthe in Nro. 3. so wird

5. $(1+p)^n = 1 + me + \frac{m(m-n)}{1.\ 2\ n} + \frac{m^2.(n-1)}{1.\ 2\ n}\Big\} e^2$

$+ \frac{m.(m-n)\ (m-2n)}{1.\ 2.\ 3n^2} + \frac{m^2\ (m-n)\ (n-1)}{1.\ 2\ n^2} + \frac{m^3\ (n-1)\ (n-2)}{1.\ 2\ .\ 3n^2}\Big\} e^3 + \ldots$

6. Nun ist

$\frac{m\ (m-n)}{1.\ 2n} + \frac{m^2.(n-1)}{1.\ 2n} = m\frac{(m-n+mn-m)}{1.2n}$

$= m.\ \frac{m-1}{2} = \frac{m.(m-1).}{1.\ 2}$

Ferner

Ferner: $\frac{m.(m-n)(m-2n)}{1.\ 2\ .\ 3\ n^2} + \frac{m^2(m-n).(n-1)}{1.\ 2\ n^2} +$

$\frac{m^3(n-1)(n-2)}{1\ .\ 2\ .\ 3\ n^2} = \frac{m.(m-n)(m-2n)+3m.^2}{1\ .\ 2}$

$\frac{(m-n)(n-1)+m^3(n-1)(n-2)}{.\ 3\ \ n^2}$

$= m\left(\frac{2n^2-3mn^2+m^2n^2}{1\ .\ 2\ .\ 3\ n^2}\right) = m\left(\frac{m^2-3m+2}{1\ .\ 2\ .\ 3}\right)$

$= \frac{m.(m-1)(m-2)}{1.\ \ 2.\ \ 3}$

7. Substituirt man diese Ausdrücke der Coefficienten in Nr. 5; so wird

$(1+p)^n = 1 + me + \frac{m.(m-1)}{1.\ 2}e^2 + \frac{m.(m-1)(m-2)}{1.\ 2.\ 3}$

$e^3 + \ldots\ldots = (1+e)^m$ Nro. 2, und $(1+e)^{\frac{m}{n}}$

$= (1+p)^{\frac{n}{n}}$ (§. 95. N. 1 u. §. 105. I Zuſ.) $= 1+p,$

mithin nach Nro. 1.

$(1+e)^{\frac{m}{n}} = 1 + \frac{m}{n}e + \frac{m.(m-n)}{1.\ 2n^2}e^2 + \frac{m.(m-n)(m-2n)}{1.\ 2.\ 3n^3}$

$e^3 + \ldots\ldots$

§. 138.

Lehrsatz:

Der binomische Lehrsatz erstreckt sich auch auf Potenzen, deren Exponent ein negativer Bruch ist; d. i. (§ 136. III Zus.)

$$(1+e)^{-\frac{m}{n}} = 1 - \frac{m}{n}e + \frac{m.(m+n)}{1.\ 2n^2}e^2 - \frac{m.(m+n)(m+2n)}{1.\ 2.\ 3\ n^3}e^3 + \ldots.$$

Beweis:

$$1.\ (1+e)^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{(1+e)^{\frac{m}{n}}}$$ (§. 104. III. Zus.) also

$$(1+e)^{\frac{m}{n}} \times (1+e)^{-\frac{m}{n}} = 1$$ (§. 43. b.

2 Man bestimme den ersten Factor aus § 137, und für den zweyten Factor nehme man indessen die zuerweisende Formel, ist nun ihr Product = 1, so ist die hier angenommene Formel die wahre; d. i.

$$(1+e)^{\frac{m}{n}} = 1 + \frac{m}{n}e + \frac{m.(m-n)}{1.\ 2n^2}e^2 + \frac{m.(m-n)(m-2n)}{1.\ 2.\ 3.\ n^3}e^3 + \ldots.$$

$$(1+e)^{-\frac{m}{n}} = 1 - \frac{m}{n}e + \frac{m.(m+n)}{1.\ 2n^2}e^2 - \frac{m.(m+n)(m+2n)}{1.\ 2.\ 3\ n^3}e^3 + \ldots$$

(1+e)

$$(1+e)^{\frac{m}{n}} \times (1+e)^{\frac{m}{n}} = 1 + \left.\begin{matrix} \frac{m}{n} \\ + \frac{m}{n} \end{matrix}\right\} e + \left.\begin{matrix} \frac{m.(m-n)}{1.\ 2n^2} \\ - \frac{m^2}{n^2} \\ + \frac{m.(m+n)}{1.\ 2n^2} \end{matrix}\right\} e^2$$

$$+ \left.\begin{matrix} \frac{m.(m-n)(m-2n)}{1.\ 2.\ 3n^3} \\ - \frac{m^2.(m-n)}{1.\ 2\ n^3} \\ + \frac{m^2.(m+n)}{1.\ 2\ n^3} \\ - \frac{m.(m+n)(m+2n)}{1.\ 2.\ 3\ n^2} \end{matrix}\right\} e^3$$

3. Nun ist $\frac{m}{n} - \frac{m}{n} = 0$ der Coefficient des zweyten Gliedes.

Vom dritten Gliede ist wieder der Coefficient:

$$\frac{m(m-n)}{1.\ 2\ n^2} - \frac{m^2}{n^2} + \frac{m.(m+n)}{1.\ 2n^2} = \frac{m(m-n) + m(m+n)}{2\ n^2}$$

$$-2m^2$$

$$= \frac{m^2 - mn + m^2 + mn - 2m^2}{2\ n^2} = 0$$

Vom

Vom vierten Gliede ist wieder der Coefficient = 0; denn

$$\frac{m.(m-n)(m-2n)}{1.\quad 2.3\ n^2} - \frac{m^2(m-n)}{1.2\,n^3} + \frac{m^2(m+n)}{1.2\,n^3} -$$

$$- \frac{m(m+n)(m+2n)}{1.2.3\quad n^3}$$

$$= \frac{m.(m-n)(m-2n) - 3m^2(m-n) + 3m^2(m+n) -}{1.2.3\quad n^3}$$

$$\frac{m(m+n)(m+2n)}{}$$

$$= \frac{m^3 - 3m^2n + 2mn^2 - 3m^3 + 3m^2n + 3m^3 + 3m^2n -}{1.2.3.\ n^3}$$

$$\frac{m^3 - 3m^2n - 2mn^2}{} = 0$$

4. eben so sind alle folgende Coefficienten = 0, mithin das Product beyder Reihen = 1, und

5. die für $(1+e)^{\frac{m}{n}}$ angenommene Reihe die wahre, folglich gilt der binomische Lehrsatz auch für Potenzen, deren Exponenten negative Brüche sind.

§. 139.

Lehrsatz:

Die Gesetze des binomischen Lehrsatzes erstrecken sich auch auf Potenzen, deren Exponenten negative ganze Zahlen sind, oder (§. 136. IV. Zus.)

$$(1+e)^{-m} = 1 - \frac{m}{1}e + \frac{m.(m+1)}{1.2}e^2 -$$

$$\frac{m.(m+1)(m+2)}{1.2.3\ n^2}e^3 + \ldots$$

Be-

Beweis:

1 Nach §. 138 ist

$$(1+e)^{\frac{m}{n}} = 1 - \frac{m}{n}e + \frac{m(m+n)}{1\cdot 2\,n^2}e^2 - \frac{m\cdot(m+n)(m+2n)}{1\cdot 2\cdot 3\,n^3}e^3 + \ldots\ldots$$

2 Setzet man $n = 1$; so wird

$$(1+e)^{-m} = 1 - me + \frac{m(m+1)}{1\cdot 2}e^2 - \frac{m(m+1)(m+2)}{1\cdot 2\cdot 3}e^3 + \ldots\ldots$$

I Zusatz: Durch die 4. Lehrsätze §. 136 — 139 ist der binomische Lehrsatz für alle Potenzen erwiesen, deren Exponenten Rationalzahlen sind. — (§. 135 II. Zus.), und da sich Irrationalzahlen auf rationale reduciren lassen, (§. 133. Zus.) so ist der Lehrsatz allgemein erwiesen.

II Zusatz: Substituirt man in der Formel §. 136. I. Zus.) für e, Q, oder setzet $Q = \frac{b}{a}$; so ist:

$$(a+b)^m = a^m(1+Q)^m = a^m\left[1 + mQ + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}Q^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}Q^3 + \ldots\right.$$

$$= a^m + m\,a^m Q + \frac{m\cdot(m-1)}{1\cdot 2}a^m Q^2 + \frac{m\cdot(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}a^m Q^3 + \ldots\ldots$$

Nun ist jedes Glied durch sein vorhergehendes theilbar, drückt man daher das erste Glied durch A, das

zwey-

zweyte durch B, und so die folgenden durch C, D, E, u. s. f. aus; so ist

$$(a+b)^m = a^m + mAQ + \frac{m-1}{2}BQ + \frac{m-2}{3}CQ + \frac{m-3}{4}DQ + \ldots.$$

III Zusatz: Auf die nemliche Art wird für Potenzen mit gebrochenen Exponenten (§. 136 II. u. III. Zus.)

$$(a+b)^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n}AQ + \frac{m-n}{2n}BQ + \frac{m-2n}{3n}CQ + \ldots$$

§. 140.

Aufgabe:

Eine mehrtheilige Größe zu einer Dignität erheben, deren Exponent eine positive ganze Zahl ist.

Auflösung:

1 Man nehme alle Theile der gegebenen Größe, ausser dem letzten, für den ersten Theil a,

2 den letzten Theil für den zweyten b,

3 den Exponenten der verlangten Dignität für m;

4 setze aus der Formel (§. 139 II Zus.) oder auch nach der Formel (§. 136) um ein Glied mehr aus, als der Exponent der verlangten Dignität Einheiten enthält, d. i. m + 1 Glieder (§. 135. I), und substituire die Nr. 1 — Nr. 3 gefundenen Werthe.

Beyspiel. $(\frac{1}{2}p+3q)^5$; so ist $a = \frac{1}{2}p$; $b = 3q$,

$Q = \frac{b}{a} = \frac{3q}{\frac{1}{2}p} = 6\frac{q}{p}$; $m = 5$, mithin (§. 139 II.

Zuſ.) $a^m = (\frac{1}{2}p)^5 = \frac{1}{32}p^5$

$mAQ = 5 \times \frac{1}{32}p^5 \times 6\frac{q}{p} = \frac{15}{16}p^4q$

$\frac{m-1}{2}BQ = 2 \times \frac{15}{16}p^4q \times 6\frac{q}{p} = \frac{45}{4}p^3q^2$

$\frac{m-2}{3}CQ = \frac{45}{4}p^3q^2 \times 6\frac{q}{p} = \frac{135}{2}p^2q^3$

$\frac{m-3}{4}DQ = \frac{1}{2} \times \frac{135}{2}p^2q^3 \times 6\frac{q}{p} = \frac{405}{2}pq^4$

$\frac{m-4}{5}EQ = \frac{1}{5} \times \frac{405}{2}pq^4 \times 6\frac{p}{q} = 234q^5$

Folglich:

$(\frac{1}{2}p + 3q)^5 = \frac{1}{32}p^5 + \frac{15}{16}p^4q + \frac{45}{4}p^3q^2 + \frac{135}{2}p^2q^3 + \frac{405}{2}pq^4 + 243q^5$

Zuſatz:

$(p+q+r)^5 = (p+q)^5 + 5(p+q)^4r + 10(p+q)^3r^2 + 10(p+q)^2r^3 + 5(p+q)r^4 + r^5$

§. 141.

Aufgabe:

Eine mehrtheilige Größe zu einer Dignität zu erheben, deren Exponent eine negative ganze Zahl, oder ein poſitiver oder negativer Bruch iſt.

Auflöſung:

1. Man theile wieder die gegebene Größe in zwey Theile, nehme einen für a, den andern für b, und den Exponenten für m, oder $\frac{m}{n}$, je nachdem

der

der Exponent der verlangten Dignität eine ganze oder gebrochene Zahl ist.

2. Da nun allemal die Reihe unendlich ist (§. 135. I.) so bestimme man aus (§. 139 II. u. III. Zus.) so viele Glieder, daß die folgenden als verschwindend weggelassen werden können, wenn die Reihe abnimmt, wächst sie aber, so ist die Auflösung unmöglich, weil man die Potenz nie vollständig darstellen kann.

Beyspiel: $\sqrt[3]{68} = (64+4)^{\frac{1}{3}}$ (§. 105 I. Zus.)

Man nehme $a = 64$; $b = 4$; $Q = \frac{4}{64} = \frac{1}{16}$; $m = 1$; $n = 3$ (§. 139 III. Zus.), mithin:

$a^{\frac{m}{n}} = 64^{\frac{1}{3}} = 4,0000000 = A$

$\frac{m}{n} A Q = \frac{1}{3} \times 4 \times \frac{1}{16} = \frac{1}{12} = 0,0833333$ (§. 91) $= B$

$\frac{m-n}{3n} B Q = \frac{1-3}{6} \times 0,0833333 \times \frac{1}{16} =$

$- 0,0017361 = C$

$\frac{m-2n}{3n} C Q = \frac{1-6}{9} \times -0,0017361 \times \frac{1}{16} =$

$0,0000603 = D$

$\frac{m-3n}{4n} D Q = \frac{1-9}{12} \times 0,0000603 \times \frac{1}{16} =$

$- 0,0000025 = E$

$\frac{m-4n}{5n} E Q = \frac{1-12}{15} \times -0,0000025 \times \frac{1}{16} =$

$0,0000001 = F$

Nun ist:

A = 4,0000000
B = 0,0833333
D = 0,0000603
F = 0,0000001

Summe = 4,0833937

C = — 0,0017361
E = — 0,0000025

Summe = — 0,0017386

Summe — 0,0017386

Diff. = 4,0816551

Folglich: $\sqrt[3]{64} = 4,0816551\ldots\ldots$

VII Abschnitt.

Von den Permutationen und Combinationen.

§. 142.

Lehrsatz:

Die Anzahl der **Permutationen**, das ist, wie oft man bey n Dingen ihre Stellen verwechseln kann, erhält man, wenn man so viele in natürlicher Ordnung fortlaufende Zahlen, von 1 angefangen, miteinander multiplicirt, als Dinge gegeben sind, oder $= 1.2.3.4.\ldots\ldots(n-1).n$

Beweis: 1 In der II Tabelle enthält die erste lothrechte Spalte die gegebenen Dinge, und die zweyte die möglichen Versetzungen derselben, man sieht nemlich

muß

2. daß

2. daß ein Ding a nur eine Stelle haben kann; kömt aber das zweyte Ding b dazu, so kann solches zwey Stellen, die erste und zweyte haben, nemlich b a, a b, mithin ist die Anzahl der Versetzungen für 2 Dinge = 1. 2.

3. Das dritte Ding c kann bey jeder der vorigen Versetzungen drey Stellen, nemlich am Anfange, in der Mitte, und am Ende, haben, folglich muß die Anzahl der vorigen Versetzungen von zweyen Dingen mit 3 multiplicirt werden, oder die Anzahl der Versetzungen von dreyen Dingen ist = 1. 2. 3.

4. Das vierte Ding d giebt wieder mit jeder der vorigen Versetzungen von 3 Dingen vier neue, das ist: es kann bey jeder der vorigen Versetzungen vier Stellen, nemlich vor dem ersten, vor dem zweyten, vor und nach dem dritten Dinge seine Stelle haben, mithin geben 4 Dinge 1. 2. 3. 4. Versetzungen.

5. Gilt nun das angeführte Gesetze für irgend eine Anzahl der Dinge z. B. m; so gilt es noch bey der nächst höhern Anzahl m + 1 derselben; denn wenn m Dinge 1. 2. 3. 4. . . . . m Versetzungen geben, so läßt sich das neue hinzukommende (m+1)te Ding mit jeder der vorigen Versetzungen (m+1)mal versetzen, da es offenbar bey m Dingen m + 1 Stellen giebt, wo es stehen kann, mithin ist die Anzahl der Versetzungen = 1. 2. 3. . . . . (m — 1) m. (m + 1)

6. Aus Induction Nr. 1 — 4 ist das Gesetz für 4 Dinge erwiesen, also folget aus Nr. 5 die Giltigkeit für fünf

Dinge,

Dinge, und aus diesen für 6 u. s. f. folglich ist allgemein die Anzahl der Versetzungen bey n Dingen $= 1.2.3.4.\ldots(n-1).n$

I Zusatz: Die 5 Vocalen lassen sich 120mal, und die 8 Thöne in der Musik 40320mal, zwölf Personen an einem Tische 479001600mal versetzen.

II Zusatz: Wenn bey einer gewißen Ordnung z. B. von 6 Dingen a β e d ε f vier Dinge a c d f ihre Stellen behalten, und nur die zwey Dinge β, ε wechseln, so geben letztere zwey Versetzungen β, ε und ε β und jede derselben läßt sich mit den obigen vier Dingen gleichvielmal versetzen; sind also die zwey Dinge β und ε ganz einerley, so fällt davon die Hälfte weg, oder die ganze Anzahl der Versetzungen wird um die Hälfte vermindert, mithin geben in diesem Falle n Dinge $\frac{1.2.3.\ldots.n}{1.\ 2.}$ Versetzungen; so läßt sich z. B. das Wort München $\frac{1.2.3.4.5.6.7}{1.\ 2.}$ mal versetzen, weil n zweymal vorkömmt.

III Zusatz: Behalten bey einer gewißen Ordnung z. B. von 7 Dingen a β c d ε f g wieder 4 Dinge a c f g ihre Stellen, 3 Dinge aber β d ε wechseln, so geben solche 1. 2. 3. $=6$ Versetzungen für sich genommen, und jede derselben läßt sich mit jeder Ordnung obiger 4 Dinge gleichvielmal versetzen: sind also letztere drey Dinge einerley, so fallen sie in eine zusammen, mithin

geben

geben n Dinge, wenn eines davon dreymal vorkömt, $\frac{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ \ldots\ (n-1)\,n}{1.\ 2.\ 3.}$ Versetzungen.

IV Zusatz: Kömt bey n Dingen, ein Ding m mal, und ein anderes p mal vor, so ist die Anzahl sämmtlicher Versetzungen $\frac{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ \ldots\ n}{1.\ 2.\ 3.\ldots m.\ 1.\ 2.\ 3.\ldots p}$ z. B. In dem Worte Studiosus lassen sich die 9 Buchstaben, weil s dreymal, und u zweymal vorkömmt, $\frac{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6.\ 7.\ 8.\ 9.}{1.\ 2.\ 3.\ 1.\ 2.} = 30240$ mal versetzen.

§. 143.

Erklärungen:

Wenn man aus einer gegebenen Menge von Dingen, so viele Paare, so viele nach Dreyen, Vieren, u. s. w. oder überhaupt nach m nimmt, als es angeht, so nennet man sie Amben, Ternen, Quaternen u. s. w. oder überhaupt Combinationen, oder Versetzungen nach Zweyen, Dreyen u. s. f. nach m.

§. 144.

Lehrsatz:

Die Anzahl der Amben für n Dinge ist $= \frac{n.\,(n-1)}{1.\quad 2.}$

Beweis:

1 Aus der IIIten Tabelle leuchtet die Wahrheit des Satzes durch Induction für 5 Dinge ein, denn

1 Ding

1 Ding giebt 0 Paare $= \frac{1.(1-1)}{1.2}$

2 Dinge geben 1 Paar $= \frac{2.1}{1.2}$

3 Dinge geben 3 Paare $= \frac{3.2}{1.2}$

4 Dinge hingegen 6 Paare $= \frac{4.3}{1.2}$

5 Dinge endlich 10 Paare $= \frac{5.4}{1.2}$

2. Ueberhaupt giebt allemal ein neues Ding, welches hinzu kömt, so viel neue Paare, als vorher Dinge waren, das m + 1te Ding giebt nemlich zu den vorigen m neue Paare.

3. Gilt daher die Formel für irgend eine Anzahl m von Dingen, so gilt sie auch noch für die nächsthöhere Anzahl; das ist: geben m Dinge $\frac{m.(m-1)}{1.2}$ Paare, so geben m + 1 Ding $\frac{(m+1).m}{1.2}$ Paare, denn

4. Wenn m Dinge $\frac{m.(m-1)}{1.2}$ Paare geben, so giebt zu diesen das neuhinzukommende Ding m neue Paare, oder die Anzahl der Amben für m + 1 Dinge ist =

$$= \frac{m.(m-1)}{1.2} + m = \frac{m}{1} \times \left(1 + \frac{m-1}{2}\right) = \frac{(m+1)m}{1.2}$$

5. Da nun für m = 5 die Annahme richtig ist, so gilt die Formel auch für 6 Dinge, und aus 6 für 7, und so für jede höhere Anzahl von Dingen, mithin geben allgemein n Dinge $\frac{n.(n-1)}{1.2}$ Amben.

§. 145.

Lehrsatz:

Die Anzahl der Ternen von n Dingen ist $= \frac{n.(n-1)}{1.\quad 2.} + \frac{(n-2)}{3}$

Beweis:

1. Aus der IIIten Tabelle leuchtet die Wahrheit des Satzes, für 5 Dinge ein, denn offenbar giebt

1 Ding 0 Ternen $= \frac{1.(1-1)(1-2)}{1.\quad 2.\quad 3}$

2 Dinge geben 0 Ternen $= \frac{2.\ 1.\ (2-2)}{1.\quad 2.\ 3}$

3 Ding geben 1 Terno $= \frac{3.\ 2.\ 1}{1.\ 2.\ 3}$

4 Dinge geben 4 Ternen $= \frac{4.\ 3.\ 2}{1.\ 2.\ 3}$

Von 5 Dingen erhält man 10 Ternen $= \frac{5.\ 4.\ 3}{1.\ 2.\ 3}$

2. Das folgende 6te Ding giebt zu den 10 Ternen, die man von 5 Dingen erhält: so viele neue Ternen, als 5 Dinge Amben geben, d. i. $\frac{5.4}{1.2}$ neue Ternen (§. 144);

mithin geben 6 Dinge $\frac{5.4.3}{1.2.3} + \frac{5.4}{1.2} = \frac{6.5.4}{1.2.3} =$ 20 Ternen.

3. Ueberhaupt giebt allemal das neue Ding, welches man beysetzet zu den vorigen Ternen so viele neue, als die vorigen Dinge Amben gaben, denn offen-

bar

bar giebt es mit jedem Ambo einen Terno, mithin giebt das m + 1 te Ding $\frac{m.(m-1)}{1.\ 2}$ neue Ternen (§. 144).

4. Gilt also der aufgestellte Satz für irgend eine Anzahl m von Dingen, so gilt er auch noch für die nächst höhere Anzahl m + 1, d. i. wenn m Dinge $\frac{m.(m-1)(m-2)}{1.\ 2.\ 3}$ Ternen geben, so geben m + 1 Dinge $\frac{(m+1)\,m\,(m-1)}{1.\ 2.\ 3}$ Ternen;

Denn

Wenn m Dinge $\frac{m.(m-1)(m-2)}{1.\ 2.\ 3}$ Ternen geben so bekömt man nebst diesen, wenn noch ein Ding hinzukömt, $\frac{m.(m-1)}{1.\ 2}$ neue Ternen Nr. 3, oder m + 1 Ding geben $\frac{m.(m-1)(m-2)}{1.\ 2.\ 3} + \frac{m.(m-1)}{1.\ 2}$

$= \frac{(m+1)\,m.(m-1)}{1.\ 2.\ 3}$ Ternen.

5. Da nun die Annahme für m = 6 Nr. 2 richtig ist, so gilt der Satz auch für 7 Dinge, aus 7 für 8, und so für jede größere Anzahl von Dingen, mithin ist allgemein die Anzahl der Ternen für n Dinge = $\frac{n.(n-1).(n-2).}{1.\ 2.\ 3}$

1 Zusatz: Auf die nemliche Art läßt sich erweisen, das die Anzahl der Quaternen = $\frac{n.(n-1)(n-2)n-3)}{1.2.3.4}$

und

und wenn man die Induction immer fortsetzet, so findet man, daß die Anzahl der Versetzungen von n Dingen nach $m = \frac{n.(n-1)(n-2).....)(n-(m-1))}{1.2.3.....m}$

Anmerkung:

Der strenge Beweis der letzten allgemeinen Formel setzet Lehren voraus, die für gegenwärtiges Lehrbuch zu weitläufig sind.

II Zusatz: In der gewöhnlichen Zahlen Lotterie giebt es von 90 Zahlen 4005 Amben, 117480 Ternen, 2555190 Quaternen; da nun bey einer jeden Ziehung 5 Zahlen gehoben werden; so kommen dabey 10 Amben, 10 Ternen, und 5 Quaternen zum Vorschein

§. 146.

Lehrsatz:

Wenn das nemliche Ding mehrmal vorkömt, und überdieß Versetzungen der Dinge Statt haben, so ist die Anzahl der Versetzungen nach Zweyen bey n Dingen $= n^2$

Beweis:

1. Durch Induction erhellet die Wahrheit dieses Satzes aus der zweyten Spalte der IVten Tabelle, so lange die Anzahl der Dinge nicht grösser als 4 ist;

Denn 1 Ding giebt 1 Ambo $= 1^2$
2 Dinge geben 4 Amben $= 2^2$
3 Dinge .....9..... $= 3^2$
4 Dinge ....16..... $= 4^2$

2. Eben so läßt sich aus dieser Tabelle bemerken, daß allemal das neue Ding, welches hinzukömt nebst den schon vorhandenen Verbindungen folgende neue giebt:

I. Mit jedem der vorigen Dinge zwey,

II. Mit sich selbst eine, weil es zweymal gesetzet werden darf.

3. Gilt daher der aufgestellte Satz für irgend eine Anzahl n von Dingen, so gilt er auch für die nächst höhere Anzahl derselben, oder für $n + 1$ Dinge; denn

4. Geben n Dinge n^2 Versetzungen nach Zweyen, so giebt das neuhinzukommende $n + 1$te Ding $2n + 1$ neue Versetzungen nach zweyen (Nr. 2), mithin ist die ganze Anzahl derselben für $n + 1$ Dinge $= n^2 + 2n + 1 = (n + 1)^2$, also dem angeführten Gesetze gemäß.

5. Da nun für $n = 4$ das aufgestellte Gesetz gilt (Nr. 1), so gilt es auch noch für $n + 1 = 5$ Dinge, aus 5 für 6, und so immer für jede nächst höhere Anzahl von Dingen; folglich allgemein.

§. 147.

Lehrsatz:

Wenn wieder Versetzungen der Dinge Statt haben, und das nemliche Ding mehrmal genommen werden darf, so ist für n Dinge die Anzahl der Verbindungen nach Dreyen $= n^3$

Beweis:

1. So lange die Anzahl n der gegebenen Dinge nicht gröſſer als 4 ist, so folgt die Wahrheit des aufgestellten Satzes durch Induction aus der IVten Tabelle; denn

1 Ding giebt 1 Versetzung nach Dreyen $= 1^3$
2 Dinge geben 8 Versetzungen. . . . . $= 2^3$
3 Dinge . . . 27 . . . . . $= 3^3$
4 Dinge . . . 64 . . . . . $= 4^3$

2. Aus eben dieser Tabelle läßt sich bemerken, daß ein neues Ding, welches den vorigen beygesetzet wird, zu den schon vorhandenen Verbindungen folgende neue giebt:

I Mit jedem Paare der vorhergehenden Dinge läßt es sich dreymal versetzen, und giebt daher dreymal so viele neue Verbindungen, als solche Paare vorhanden sind;

II Das neue Ding selbst zweymal genommen, läßt sich mit jedem der vorigen Dinge dreymal versetzen, und giebt also dreymal so viele neue Verbindungen, als vorher Dinge waren:

III Das neue Ding endlich selbst dreymal genommen, giebt wieder eine neue Verbindung nach Dreyen.

3. Gilt nun das aufgestellte Gesetz für irgend eine Anzahl n von Dingen, so gilt es auch für die nächst höhere Anzahl $n + 1$ derselben, das ist: wenn n Dinge n^3 Verbindungen nach Dreyen geben, so bekömt man von $n + 1$ Dingen $(n + 1)^3$ solche Verbindungen, denn

4. Wenn

4. Wenn das n + 1 te Ding dazukömt, so giebt es auſſer den schon vorhandenen n^3 Versetzungen nach Nr. 2 folgende neue:

I $3n^2$ (§. 146); II $3n$; III 1;

Folglich ist die ganze Anzahl derselben =

$$= n^3 + 3n^2 + 3n + 1 = (n+1)^3.$$

5. Da nun der aufgestellte Satz für $n = 4$ gilt (N. 1), so gilt er auch für $n + 1 = 5$, aus 5 für 6, und so immer für jede nächstfolgende Anzahl von Dingen, mithin allgemein.

I. Zusatz: Durch ähnliche Schlüsse läßt sich darthun, daß die Anzahl der Verbindungen bey den nemlichen Bedingungen nach Vieren $= n^4$; und da man diese Schlüsse immer fortsetzen kann, so ist die Anzahl der

Verbindungen nach $m = \overset{m}{n}$.

II. Zusatz: Mit zwey Würfeln, an welchen sich auf jeder Seite sogenannte Augen befinden, sind 36 Würfe möglich.

III. Zusatz: Die 9 Zahlenziffern lassen sich nach Zweyen 81 mal versetzen, rechnet man also jene 9 Paare dazu, wo jedem Zahlenziffer 0 angehängt ist, so kann man mit 2 Ziffern 90, und also mit einem und zwey Ziffern in allem 99 verschiedene Zahlen bezeichnen, um also die Zahl hundert zu schreiben, muß man wenigst drey Ziffern nehmen.

IV. Zusatz: Nach Dreyen erhält man aus den 9 Zahlenziffern 729 Verbindungen, ferner kann bey iedem Paare von Zahlenziffern die Null in der Mitte, und am Ende stehen, dieses giebt 2. 81 = 162 Verbindungen; endlich kann nach jedem Zahlenziffer ein Paar Nullen folgen, woraus wieder 9 Verbindungen entstehen, mithin geben die 10 Ziffern 900 Verbindungen nach Dreyen, so daß sich mit 1, 2 und 3 Ziffern 999 verschiedene Zahlen ausdrücken lassen, folglich um Tausend zuschreiben brauchet man wenigst 4 Ziffern. Man sieht daraus, daß im Decimalsysteme (§. 24) das Gesetz der Sparsamkeit auf das strengste beobachtet seye.

V. Zusatz: Abstrahirt man von allem Inhalte der drey Sätze, aus denen der kathegorische Sillogismus besteht, und sieht nur auf ihre Form, so kann jeder der Form nach entweder allgemein bejahend, oder allgemein verneinend; particular bejahend, oder particular verneinend seyn, zu deren Bezeichnung a, e. i, o dienen. Betrachtet man nur die beyden Prämissen, und abstrahirt überdieß von den Gesetzen der Logik, so giebt es 16 verschiedene Schlußarten, die in der 7ten Spalte der IVten Tabelle dargestellet sind. Nimmt man endlich auch den dritten oder Schlußsatz in Anschlag ohne die weitern Gesetze der Logik in Betracht zu ziehen, so erhält man 64 Schlußarten, die alle in der dritten Spalte der IVten Tabelle angezeiget sind. Durch die Gesetze der Logik; daß beyde Prämissen zugleich weder verneinend, noch

particulär seyn dürfen, und das sich die Conclusion nach dem schwächern Theil richten müsse, fallen alle Schlußarten bis auf 11 weg, die mit Cursivlettern in der Tabelle bezeichnet sind, und von diesen wird die Schlußart i e o durch die einzelnen Gesetze einer jeden Figur unzulässig.

IV. Hauptstück.

Von Gleichungen.

I Abschnitt.

Von Gleichungen überhaupt.

§. 148.

Erklärungen:

a Ein doppelter Ausdruck von einerley Größe, heißt eine **Gleichung** (Aequatio) z. B. $3 + 4 = 7$.

b Die beyden Ausdrücke der nemlichen Größe heißen die **Seiten** (membra), und die durch die Zeichen + oder − verbundenen Größen, die **Glieder** der Gleichung (termini); so machen in der vorhergehenden Gleichung $3 + 4$ die eine, und 7 die andere Seite aus, von welcher erstere zwey, die andere nur ein Glied enthält.

c Jener

c Jener Theil der Mathematik, welcher den Werth der unbekannten Größen aus gegebenen Bedingungen vermittels der Gleichungen abzuleiten lehret, heißt **Algebra**

Zusatz:

Die Behandlungsart jeder Gleichung besteht

a in der **Formation** oder Bildung der Gleichung aus den gegebenen Bedingungen der unbekannten Größen; sie ist eigentlich die Uebersetzung der Aufgabe aus der bürgerlichen in die algebraische Sprache. Man bezeichnet bekannte Größen mit den erstern Buchstaben des Alphabetes z. B. a, b, c, u. s. w., die unbekannten Größen mit den letztern Buchstaben x, y, z,

b in der **Reduction**, wodurch man der Gleichung eine einfachere, und schicklichere Gestalt giebt, vorzüglich, wenn die unbekannte Größe als Divisor, oder Wurzelgröße vorkömmt.

c In der **Solution**, oder endlichen Reduction, wo die Gleichung so weiter behandelt wird, daß der **Werth** der unbekannten Größe, d. i. jene Größe gefunden wird, die den gegebenen Bedingungen entspricht; diese gefundene Größe, oder Größen, wenn es für eine Gleichung deren mehrere giebt, nennet man die **Werthe**, oder die **Wurzeln** der gegebenen Gleichung.

Anmerkung:

Da die Formation einer Gleichung auf Sachenkenntniß, Uebung, und gesunde Urtheilskraft, also Dingen beruhet, die Mathematik voraussetzen muß, aber nicht lehren kann, so sind ihre Vorschriften auf Reduction und Solution schon gegebener Gleichungen eingeschränket.

§. 149.

Anwendung des 9ten Grundsatzes §. 19 auf die Reductionslehre der Gleichungen;

1. Eine Gleichung bleibt noch, wenn man zu beyden Seiten derselben Gleiches addirt, oder davon subtrahirt.

2. In jeder Gleichung darf man auf beyden Seiten mit einerley Größe multipliciren, oder dividiren.

3. In jeder Gleichung kann man der Gleichung unbeschadet beyde Seiten zu gleichen beliebigen Dignitäten erheben, gleiche beliebige Wurzeln aus ihnen ziehen.

I Zusatz: Jedes Glied einer Gleichung läßt sich, wenn man sein Zeichen ändert, versetzen, d. i von einer Seite auf die andere bringen, man kann nemlich eine Größe mit dem Zeichen + auf die andere Seite schreiben, wenn man ihr das Zeichen — vorsetzet; und umgekehrt. Z. B.

Wenn

Wenn $a + b = c$ so ist $a = c - b$ { Eben so wenn $a - d = f$, so ist $a = f + d$

Denn $a + b - b = c - b$; und $a - d + d = f + d$ (Nr. 1.)

also $a = c - b$; $a = f + d$.

II Zusatz: Die Zeichen aller Glieder lassen sich in die entgegengesetzten verwandeln. Z. B.

Wenn $a + b = c - d$; so ist $-a - b = -c + d$.

Denn man darf nach vorigem Zusatze alle Glieder versetzen, wodurch jedes das entgegengesetzte Zeichen erhält.

III Zusatz: Jede Gleichung läßt sich auf o bringen, wenn man alle Größen auf die andere Seite schaffet.

IV Zusatz: Eine Größe, die mit einer andern durch Multiplication verbunden ist, läßt sich davon trennen, wenn man damit alle Glieder der Gleichung dividirt. Z. B. wenn $3a + 6b = 15$; so ist

$a + 2b = 5$ (Nr. 2).

V Zusatz: Größen, die als Nenner, oder Divisoren vorkommen, lassen sich wegschaffen, wenn man mit ihnen alle Glieder der Gleichung multiplicirt, z. B.

wenn $\frac{a}{3} + b = 4c$, so ist

$a + 3b = 12c$ (Nr. 2)

§. 150.

Eintheilungen:

In einer Gleichung ist die unbekannte Größe die Hauptgröße, und von ihr erhält die Gleichung ihre Benennung; man unterscheidet daher

A in Rücksicht der **Anzahl** der vorkommenden unbekannten Größen

a Gleichungen mit **einer**,

b mit **mehrern** unbekannten Größen.

B in Rücksicht der **Beschaffenheit** der unbekannten Größen

a **einfache** Gleichungen, oder vom ersten Grade oder Ordnung, wenn die unbekannte Größe, nachdem sie kein Divisor mehr ist, auch bey keiner andern unbekannten Größe als Factor vorkömt, eine einfache Größe ist, also die erste Potenz nicht übersteigt,

b **zusammengesetzte**, oder **höhere** Gleichungen, wenn die unbekannte Größe die erste Dignität übersteigt; und zwar heißt so eine Gleichung **quadratisch**, **cubisch**, **biquadratisch** u. s. w. je nachdem die höchste Dignität der unbekannten Größe ein Quadrat, Cubus, Biquadrat u. s. f. ist.

Zusatz:

Durch eine Gleichung läßt sich eine und nur eine unbekannte Größe bestimmen; man nennet daher Gleichungen mit einer unbekannten Größe bestimmte, mit mehrern unbekannten Größen unbestimmte Gleichungen.

II. Abschnitt.

Von einfachen Gleichungen.

§. 151.

Aufgabe:

Eine gegebene einfache Gleichung mit einer unbekannten Größe aufzulösen.

Auflösung:

1. Kömt die unbekannte Größe als Nenner vor, so schaffe man sie nach §. 149. V. Zus. weg,

2. Eben so bringe man alle jene Größen weg, die bey der unbekannten Größe als Nenner stehen.

3. Setze man alle Glieder, welche die unbekannte Größe enthalten auf eine, und jene Glieder, die aus gegebenen Größen bestehen auf die andere Seite (§. 149. I. Zus.).

4. Sammle die Coefficienten der unbekannten Größe in eine Summe, ist diese nun negativ, so ändere man alle Zeichen (149. II. Zus.), und dividire damit endlich beyde Seiten (§. 149. IV. Zus.)

Z. B.

3. B. $\frac{x}{3} + 2x = 35$

$x + 6x = 105$

$7x = 105$

$x = \frac{105}{7} = 15$

Zusatz:

Wenn man für x den gefundenen Werth setzet, so muß die gegebene Gleichung bleiben (§. 248 Zus. c). und dieses dienet zur Probe für die geschehene Auflösung; so ist im gegebenen Beyspiele:

$\frac{15}{3} + 2 \times 15 = 35.$

§. 152.

Beyspiele zur Uebung:

I. $x + 9 = 16$, mithin $x = 7$

II. $2x + 5 = 17$; $x = 6$

III. $\frac{1}{2}x - 3 = 4$; $x = 14$

IV. $\frac{3}{4}x + \frac{1}{2} = 5$; $x = 6$

V. $x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x = 44$; $x = 24$

VI. Ein Both A, der täglich 5 Meilen machet, ist schon 10 Tage weg, nun wird ihm ein anderer B nachgeschicket, der täglich 7 Meilen zurückleget, wann wird er den erstern einholen? d. i.

$7x = 5(10 + x)$, mithin $x = 25$ Tage.

Oder allgemein, wenn A täglig a Meilen machet, und schon c Tage voraus ist, der nachgeschickte Both B täglich b Meilen machet, und erstern in x Tagen einholet, so ist wieder:

$bx = ac + ax$, und $x = \frac{ac}{b-a}$

VII. Es

VII. Es hat jemand einen Wein, wo ihm die Maß zu 30 kr., und einen andern, wo ihm solche zu 20 kr. zu stehen kömt; er möchte nun einen Eymer zu 60 Maß so mischen, daß die Maß 24 kr. gilt, wie viel von jeder Sorte muß er zur Mischung nehmen?

Wenn man die Anzahl der Maße vom bessern Weine x nennet, so ist jene vom schlechtern 60 — x, mithin die Werthe davon 30 x; 20 (60 — x), und von der Mischung 24 × 60, folglich:

30 x + 20 (60 — x) = 24 × 60, und x = 24 d. i. von bessern müssen 24 Maß, und vom schlechtern 36 zur Mischung genommen werden.

Allgemein, wenn der Werth vom bessern = a, vom geringern Weine = b, von der Mischung = c, das ganze Gemisch aber = 1 gesetzet wird; so ist, wenn x den Theil deß bessern, also 1 — x jenen des geringern bezeichnet,

$$a\,x + b\,(1 - x) = c\text{; mithin } x = \frac{c - b}{a - b}$$

Anmerkung:

Zu dem Beyspiele Nr. VI, wenn von den vier Größen a, b, c, x, und eben so Nr. VII, drey bekannt sind, so läßt sich allemal die vierte unbekannte finden.

§. 153.

Aufgabe:

Den Werth von zwey unbekannten Größen aufzufinden, wenn für solche 2 Gleichungen gegeben sind.

I. Auflösung:

1. Man suche den Werth der einen unbekannten Größe z. B. x aus jeder Gleichung,
2. Setze beyde gefundene Werthe einander gleich, so enthält diese neue Gleichung nur mehr die andere unbekannte Größe z. B. y, so das aus dieser Gleichung die eine x weggeschaffet, oder eliminirt ist;
3. Aus letzterer Gleichung bestimme man y nach §. 151.

II. Auflösung:

1. Man suche aus einer Gleichung den Werth für die eine unbekannte Größe x,
2. Substituire diesen gefundenen Werth für x in der andern Gleichung, so bekömt man
3. eine neue Gleichung, welche nur die andere unbekannte Größe y enthält, und wieder aus §. 151 aufgelöset werden kann.

III. Auflösung:

1. Man multiplicire mit dem Coefficienten der zu eliminirenden Größe x in der einen Gleichung, die andere Gleichung, und mit jenem der zweyten Gleichung die erste, wenn die zu eliminirende Größen in beyden Gleichungen Coefficienten, und zwar verschiedene bey sich haben.

2. Nun addire man zur ersten die zweyte Gleichung, wenn in beyden Gleichungen x verschiedene, und subtrahire sie, wenn sie einerley Zeichen hat;

3. Der Rest, oder im zweyten Falle die Summe giebt eine neue dritte Gleichung mit einer unbekannten Größe y, welche wieder nach §. 151 aufgelöset werden kann.

Beyspiel: $x + y = a$; $x - y = b$

I. Auflösung:

$x = a - y$

$x = b + y$

also $b + y = a - y$

$2y = a - b$

$y = \frac{a - b}{2}$

$x = \frac{a + b}{2}$

II. Auflösung:

$x = a - y$

$(a - y) - y = b$

$a - 2y = b$

$-2y = b - a$

$2y = a - b$

$y = \frac{a - b}{2}$

$x = \frac{a + b}{2}$

III. Auflösung:

$x + y = a$

$x - y = b$

$2x = a + b$

$x = \frac{a + b}{2}$

$x + y = a$

$x - y = b$

$+ \quad - \quad +$

$2y = a - b$

$y = \frac{a - b}{2}$

I. Zu=

I. Zusatz: Für zwey unbekannte Grösen müssen zwey verschiedene, das ist, zwey solche Gleichungen gegeben seyn, die nicht aus einander gefolgert, sondern jede aus eigenen Bedingungen der unbekannten Grösen gebildet sind.

II. Zusatz: Im gegebenen Beyspiele drücken a die Summe, b die Differenz der beyden unbekannten Grösen x und y aus, folglich ist es eine andere Auflösung des Lehrsatzes §. 86.

§. 154.

Aufgabe:

Aus drey gegebenen einfachen Gleichungen A, B, C drey unbekannte Grösen x, y, z zu finden.

Auflösung:

1. Man eliminire aus den beyden Gleichungen A, B nach §. 153 die eine unbekannte Grösse x, so erhält man eine neue Gleichung D mit den beyden übrigen unbekannten Grösen y, z.

2. Enthält nun die Gleichnng C ebenfalls nur diese zwey unbekannte Grösen, so eliminire man wieder aus C u. D die eine y, so kömt man auf eine Gleichung mit einer unbekannten Grösse, welche nach §. 151 aufgelöset werden kann.

3. Sollte aber C ebenfalls alle 3 unbekannte Größen enthalten, so muß man wieder aus A u. C, oder aus B u. C die Größe x eliminiren, mithin eine Gleichung E mit zwey unbekannten Größen y, bilden.

4. Aus den Gleichungen D und E kömt man wieder durch Elimination von y auf eine Gleichung F, die ausser z nur gegebene Größen enthält, folglich aus §. 151 aufgelöset werden kann.

I. Beyspiel:

A) $x + y = a$; B) $x + z = b$; C) $y + z = c$

$x = a - y$; $x = b - z$; $y = c - z$

D) $a - y = b - z$

$-y = -a + b - z$

$y = a - b + z$ mithin

$a - b + z = c - z$

$2z = b + c - a$

$z = \frac{b + c - a}{2}$ und

$y = a - \frac{b+c-a}{2} = \frac{a+c-b}{2}$; $x = a - \frac{a+c-b}{2} = \frac{a+b-c}{2}$

II. Beyspiel.

A) $x + \frac{y+z}{2} = a$; B) $y + \frac{x+z}{3} = b$; C) $z + \frac{x+y}{4} = c$

$2x + y + z = 2a$, $3y + x + z = 3b$; $4z + x + y = 4c$

$x = \frac{2a - y - z}{2}$, $x = 3b - 3y - z$, $x = 4c - y - 4z$

D) $\frac{2a - y - z}{2} = 3b - 3y - z$; E) $\frac{2a - y - z}{2} = 4c - y - 4z$

$2a - y - z = 6b - 6y - 2z$, $2a - y - z = 8c - 2y - 8z$

$5y = 6b - 2a - z$ $y = 8c - 2a - 7z$

F) $\frac{6b-2a-z}{5} = 8c-2a-7z$

$6b-2a-z = 40c-10a-35z$

$34z = 40c-8a-6b$

$z = \frac{40c-8a-6b}{34} = \frac{20c-4a-3b}{17}$

$y = 8c-2a-7 \times \left(\frac{20c-4a-3b}{17}\right)$

$= \frac{136c-34a-140c+28a+21b}{17} = \frac{21b-6a-4c}{17}$

$x = 3b-3+\left(\frac{21b-6a-4c}{17}\right) - \frac{20c-4a-3b}{17}$

$= \frac{51b-63b+18a+12c-20c+4a+3b}{17}$

$= \frac{22a-9b-8c}{17}$

Zusatz: Auf ähnliche Art lassen sich aus 4 Gleichungen 4 unbekannte Größen, und überhaupt aus n Gleichungen n unbekannte Größen bestimmen.

III. Abschnitt.

Von quadratischen Gleichungen.

§. 155.

Erklärungen:

Eine zusammengesetzte oder höhere Gleichung (§. 150. B. b.) heißt

a **rein** (aequatio pura), wenn darinn die unbekannte Größe nur in einer Dignität vorkömt, so ist $x^2 = bq$, eine reine quadratische, und $ax^3+b=m$ eine reine cubische Gleichung.

b un-

b **unrein, gemiſcht,** (aequatio adfecta) wenn in ſolcher die unbekannte Gröſſe mit verſchiedenen Exponenten vorkömt, ſo iſt z. B. $x^2 + px = a$ eine unreine quadratiſche, und $x^3 + px^2 = mx$ eine gemiſchte cubiſche Gleichung.

§. 156.

Aufgabe:
Eine beſtimmte reine quadratiſche Gleichung aufzulöſen.

Auflöſung:

1. Man verfahre ganz wie (§. 151.) mit einfachen Gleichungen, und

2. ziehe zu beyden Seiten die Quadratwurzel aus (§. 149. 3.) und gebe ſolcher die Zeichen ± (§. 100. I. Zuſ.) z. B. $2x^2 - 24 = 8$; ſo iſt $x = \pm 4$.

Zuſatz: Eine reine quadratiſche Gleichung hat zwey einander gleiche, aber entgegengeſetzte Werthe oder Wurzeln.

§. 157.

Lehrſatz:
Jede unreine quadratiſche Gleichung läßt ſich auf nachſtehende Formel bringen: $x^2 + px = q$.

Beweis:

1. Jede quadratiſche Gleichung läßt ſich aus §. 149. ſo ordnen, daß das Quadrat der unbekannten Gröſſe auf einer Seite poſitiv nur einmal im Anfange zu ſtehen kömt, daß

2. auf

2. auf der nemlichen Seite die einfache Größe mit der Summe ihrer Coefficienten, welche man, sie mag positiv, oder negativ seyn, allemal durch p ausdrücken kann, sich befinde, das endlich

3. auf der andern Seite nur gegebene Größen vorkommen, deren positive oder negative Summe man wieder durch q bezeichnen kann.

§. 158.

Lehrsatz:

In jeder unreinen quadratischen Gleichung ist

$$x = -\tfrac{1}{2}p \pm \sqrt{(q + \tfrac{1}{4}p^2)} = \frac{-p \pm \sqrt{(4q + p^2)}}{2}$$

Beweis:

1. Man ziehe aus der allgemeinen Formel quadratischer Gleichungen nach §. 121. die Wurzel aus, das ist:

$$x^2 + px \quad [x + \tfrac{1}{2}p$$

$$-\frac{x^2}{+px}$$

$$(2x)$$

$$px + \tfrac{1}{4}p^2$$

2. Man sieht, daß zum vollständigen Quadrat ein Thei in der gegebenen Gleichung, nemlich das Quadrat vom zweyten Theile der Wurzel fehle, da nun

3. Dieser 2te Theil dem halben Coefficienten von x gleich ist, oder $= \tfrac{1}{2}p$, und dessen Quadrat $= \tfrac{1}{4}p^2$, so addire man solches auf beyden Seiten der allgemeinen Formel; so wird $x^2 + px + \tfrac{1}{4}p^2 = q + \tfrac{1}{4}p^2$ (§. 149. 1.)

x +

$$x + \tfrac{1}{2}p = \pm\sqrt{(q + \tfrac{1}{4}p^2)} = \pm\sqrt{\left(\frac{4q + p^2}{4}\right)}$$

$$x = -\tfrac{1}{2}p \pm \sqrt{(q + \tfrac{1}{4}p^2)} = \frac{-p \pm \sqrt{(4q + p^2)}}{2}$$

Zusatz: Jede unreine quadratische Gleichung hat zwey verschiedene Werthe und Wurzeln, die entweder beyde möglich, oder unmöglich sind, je nachdem $4q + p^2$ positiv oder negativ ist (§. 100. III. Zus.).

§. 159.

Aufgabe:

Eine bestimmte gemischte quadratische Gleichung aufzulösen:

Auflösung:

1. Man bringe die gegebene Gleichung auf die Form: $x^2 + px = q$ (§. 157.)
2. Bestimme die Werthe für x aus §. 158, oder $x = -\tfrac{1}{2}p \pm \sqrt{(q + \tfrac{1}{4}p^2)}$

Beyspiel:

$x^2 - 24 = 9 - 8x$

$x^2 + 8x = 33$ Nro. 1.

$x = -4 \pm \sqrt{(33 + 16)} = -4 \pm 7$

§. 160.

Beyspiele zur Uebung:

I. $x^2 + 6x = 91$; so ist: $x = -3 \pm 10$

II. $x^2 - 9 - 100 = 23 - x$; $x = -\tfrac{1}{2} \pm \tfrac{23}{2}$

III. $x^2 - 3x = 4$; $x = \tfrac{3}{2} \pm \tfrac{5}{2}$

IV. $x^2 + \frac{3}{4}x = 153$; $x = -\frac{3}{8} \pm \frac{99}{8}$

V. $x^2 + bx = m$; $x = -\frac{1}{2}b \pm \sqrt{(m + \frac{1}{4}b^2)}$

VI. $x^2 + \frac{a-3d}{n}x = m$; $x = -\frac{a-3d}{2n} \pm \frac{\sqrt{(4mn^2 + a^2 - 6ad + 9d^2)}}{2n}$

§. 161.

Aufgabe:

Zwey Größen suchen, deren Summe, Product, und Differenz ihrer Quadrate einander gleich sind, oder nachstehende Gleichungen aufzulösen:

$$x + y = xy = x^2 - y^2$$

Auflösung:

Man nehme $x^2 - y^2 = x + y$, so ist:

$(x + y)(x - y) = x + y$ (§. 103. Zus.)

$x - y = 1$; also $x = y + 1$

folglich $(y + 1)y = y + 1 + y$ (§. 153. II. Aufl.)

$y^2 + y = 2y + 1$

$y^2 - y = 1$

$y = \frac{1}{2} \pm \sqrt{(1 + \frac{1}{4})}$ } (§. 159.)

$= \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{5}$

$x = 1 + \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{5} = \frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{5}$

Probe (§. 151. Zus.)

$x = \frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{5}$	$x = \frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{5}$
$y = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{5}$	$y = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{5}$
Summe $x + y = \frac{4}{2} \pm \sqrt{5}$	$\frac{3}{4} \pm \frac{1}{4}\sqrt{5}$
$= 2 \pm \sqrt{5}$	$\pm \frac{3}{4}\sqrt{5} + \frac{1}{4}\sqrt{25}$
Product $xy = \frac{3}{4} \pm \frac{4}{4}\sqrt{5} + \frac{5}{4}$	

End-

$= 2 \pm \sqrt{5}$

Endlich $x^2 = \frac{9}{4} \pm \frac{3}{2}\sqrt{5} + \frac{1}{4}\sqrt{25}$

$y^2 = \frac{1}{4} \pm \frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{1}{4}\sqrt{25}$

Differenz $x^2 - y^2 = \frac{8}{4} \pm \frac{2}{2}\sqrt{5} = 2 \pm \sqrt{5}$

IV Abschnitt.

Von der Natur, und Reduction der höhern Gleichungen überhaupt.

§. 162.

Erklärung:

Eine Gleichung heißt **irrational**, wenn in einem, oder mehrern Gliedern derselben die unbekannte Größe unter einem Wurzelzeichen steht, oder zum Exponenten einen ächten Bruch hat; z. B. $a + \sqrt{x} = b$; $b\sqrt[3]{x} - \sqrt[n]{x} = q$, $x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{2}{3}} = m$; im Gegentheile ist die Gleichung **rational**.

§. 163.

Aufgabe:

Eine irrationale Gleichung rational zu machen.

Auflösung:

Man reducire die Gleichung nach §. 149. so, daß die irrationalen Größe positiv nur einmal auf einer Seite allein zustehen kömt, und erhebe nun die Gleichung

zur Dignität, welche mit der Wurzel den nemlichen Exponenten hat.

Kömt das Wurzelzeichen mehrmal vor, so muß für jede einzelne Wurzelgröße dieses Verfahren wiederholet werden. Z. B.

I. $a\sqrt{x} = q$

$$\sqrt{x} = \frac{q}{a}$$

$$x = \frac{q^2}{a^2}$$

II. $\sqrt[3]{x} = a + \sqrt{y}$

$$x = a^3 + 3a^2\sqrt{y} + 3ay + y^2\sqrt{y}$$

$$x - a^3 - 3ay = (3a^2 + y^2)\sqrt{y}$$

$$\sqrt{y} = \frac{x - a^3 - 3ay}{3a^2 + y^2}$$

$$y = \left(\frac{x - a^3 - 3ay}{3a^2 + y^2}\right)^2$$

§. 164.

Erklärung:

Eine rationale bestimmte Gleichung ordnen heißt sie so reduciren, daß

I die unbekannte Größe nirgend als Nenner vorkömt,

II die ganze Gleichung auf o gebracht ist,

III die höchste Potenz der unbekannten Größe positiv nur einmal im Anfange steht, und dann

IV die niedern Potenzen der unbekannten Größe der Ordnung ihrer Exponenten nach auf einander folgen, und endlich daß

V alle Coefficienten in einerley Potenz der unbekannten Größe in eine Summe gebracht sind.

§. 165.

Aufgabe:

Eine gegebene bestimmte Gleichung zu ordnen.

Auflösung:

1. Wenn die Gleichung irrational ist, so bringe man sie auf eine rationale (§. 163),

2. Dieser rationalen Gleichung gebe man aus §. 149 die §. 164 bestimmte Form.

Beyspiel: $\frac{n}{x} - c = 5 a x + \frac{d h}{x}$

$$n - c x = 5 a x^2 + d h$$

$$5 a x^2 + c x + d h - n = 0$$

$$x^2 + \frac{c}{5 a} x + \frac{d h - n}{5 a} = 0$$

I Zu-

I Zusatz: Enthält eine Gleichung mehrere unbekannte Größen, oder ist sie unbestimmt, so wird sie nach einer unbekannten Größe geordnet, und die andern als Coefficienten behandelt. Z. B.

$$x^2 + b\,y\,x + c\,y = o.$$

II Zusatz: Bey vollständigen Gleichungen, wenn sie geordnet sind, muß die quadratische aus drey, die cubische aus vier, und jede Gleichung vom n ten Grade aus $n + 1$ Gliedern bestehen (135).

III Zusatz: Formulare für höhere Gleichungen sind:

a für quadratische:

$$x^2 + p\,x + q = o$$

b für cubische:

$$x^3 + p\,x^2 + q\,x + r = o$$

c für biquadratische:

$$x^4 + p\,x^3\ q\,x^2 + r\,x + s = o$$

d allgemein für jede Gleichung von der n ten Ordnung:

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + Cx^{n-3} + \ldots\ldots Qx + R = o$$

IV Zusatz: Fehlet in einer Gleichung irgend ein Glied, so kann man annehmen, das die Potenz dieses Gliedes, in einen Coefficienten $= o$ multiplicirt sey. Z. B. $x^2 + 1 = o$, wo $p = o$, mithin auch $px = o$ ist.

§. 166.

Aufgabe:

Aus zweyen rationalen Gleichungen A, B, deren jede zwey unbekannte Größen x, y enthält, eine dritte Gleichung C zu machen, die wenigst um einen Grad niedriger ist.

Auflösung I, wenn beyde nach x geordnete Gleichungen von einerley Grade sind:

Man suche aus beyden Gleichungen den Werth für die höchste Potenz von x, setze diese Werthe einander gleich, ordne diese neue Gleichung, so ist sie die verlangte C.

Auflösung II, wenn die nach x geordneten Gleichungen vom verschiedenen Grade sind:

Man multiplicire die Gleichung vom niedern Grade durch jene Potenz von x, wo durch sie mit der erstern Gleichung gleichen Grad erhält, und verfahre nun wie vorher I.

Beyspiel I.

A) $x^5 - y^2x^4 + y^3x = 0$; B) $\frac{x^5}{y^2} - y^2x^3 + p = 0$

$x^5 = y^2x^4 - y^3x$ $\qquad$ $x^5 = y^4x^3 - py^2$

$y^2x^4 - y^3x = y^4x^3 - py^2$,

C) $x^4 - y^2x^3 - yx + p = 0$

Bey-

Beyspiel II.

A) $\frac{x^3}{y} - yx + y = o$; B) $x^5 - y^3 x^4 + q = o$

$\frac{x^5}{y} - yx^3 + yx^2 = o$; $x^5 = y^3 x^4 - q$

$x^5 = y^2 x^3 - y^2 x^2$;

$y^3 x^4 - q = y^2 x^3 - y^2 x^2$

$y^3 x^4 - y^2 x^3 + y^2 x^2 - q + o$

C) $x^4 - \frac{1}{y} x^3 + \frac{1}{y} x^2 - \frac{1}{y^3} q = o$

§. 167.

Aufgabe:

Aus zweyen Gleichungen A, B, deren jede zwey unbekannte Größen von beliebiger Ordnung enthält, eine neue Gleichung Q bilden, aus welcher die eine unbekannte Größe eliminirt ist.

Auflösung:

1. Aus den beyden Gleichungen A, B mache man eine dritte C, welche um einen Grad niederer als die höchste z. B. A der gegebenen Gleichungen ist (§. 166).

2. Aus C und der niedern gegebenen B bilde man wieder eine Gleichung D, welche um einen Grad niederer als die höchste von diesen beyden;

3. Dieses Verfahren wiederhole man so lange, bis man auf 2 Gleichungen M, N kömt, deren jede die zu eliminirende Größe nur im ersten Grade enthält.

4. Aus M und N läßt sich endlich nach §. 153 Q finden, mithin eine Größe eliminiren.

Bey-

Beyspiel:

Man soll aus A und B die Größe y eliminiren.

A) $y^3 = xy^2 + 3x$ B) $y^2 = x^2 - xy - 3$

$y^3 = x^2y - xy^2 - 3y$

C) $x\,y^2 + 3\,x = x^2\,y - x\,y^2 - 3\,y$

$2\,x\,y^2 = x^2\,y - 3\,x - 3\,y$

$y^2 = \frac{1}{2}\,x\,y - \frac{3}{2} - \frac{3\,y}{2\,x}$

Diese Gleichung giebt mit B

D) $x^2 - x\,y - 3 = \frac{1}{2}\,x\,y - \frac{3}{2} - \frac{3\,y}{2\,x}$

$x\,y + \frac{1}{2}\,x\,y - \frac{3\,y}{2\,x} = x^2 - 3 + \frac{3}{2} = x^2 - \frac{3}{2}$

$3\,x^2\,y - 3\,y = 2\,x^3 - 3\,x$

M) $y = \frac{2\,x^3 - 3\,x}{3\,x^2 - 3}$

$y^2 = \left(\frac{2\,x^3 - 3\,x}{3\,x^2 - 3}\right)^2$ diese Gleichung giebt

mit B) $x^2 - x\,y - 3 = \left(\frac{2\,x^3 - 3\,x}{3\,x^2 - 3}\right)^2$

$x\,y = x^2 - 3 - \left(\frac{2\,x^3 - 3\,x}{3\,x^2 - 3}\right)^2$

N) $y = \frac{x^2 - 2}{x} - \left(\frac{2\,x^3 - 3\,x}{3\,x^2 - 3}\right)^2 : x$

folglich aus M und N wird endlich

Q) $\frac{x^2 - 3}{x} - \left(\frac{2\,x^3 - 3\,x}{3\,x^2 - 3}\right)^2 : x = \frac{2\,x^3 - 3\,x}{3\,x^2 - 3}$

I. Zusatz: Auf eine ähnliche Art mit Zuziehung des 154 §. lassen sich aus drey Gleichungen mit 3 unbekannten Grösßen zwey davon wegschaffen.

II. Zusatz: Ueberhaupt lassen sich aus n Gleichungen n — 1 unbekannte Grösßen wegschaffen, folglich eine Gleichung Q bilden, die nur eine beliebige der unbekannten Grösßen enthält, und deren Werth also dadurch bestimmt ist.

III. Zusatz: Eine Aufgabe ist also bestimmt, oder alle Werthe der unbekannten Grösße sind bestimmt, wenn so viele Gleichungen gegeben sind, als in ihr unbekannte Grösßen vorkommen; übersteigt die Anzahl der unbekannten Grösßen jene der Gleichungen, so ist die Aufgabe unbestimmt, und im umgekehrten Falle mehr als bestimmt.

§. 168.

Erklärung:

Grösßen, wie $x - a = P$; $x - b = Q$, $x - c = R$ u. s. f., wo die unbekannte Grösßen den Coefficienten sowohl als Exponenten 1 haben, und positiv sind, hingegen a, b, c u. s. w. alle Arten von Grösßen bezeichnen können, heißen einfache Factoren.

§. 169.

Lehrsatz:

Das Product von zwey einfachen Factoren giebt eine quadratische, von drey eine cubische, von vier Factoren eine biquadratische Gleichung.

Be-

Beweis:

Man multiplicire §. 168 den einfachen Factor $P = x - a$ mit $Q = x - b$; das Product mit $R = x - c$, und letzteres mit $S = x - d$, so erhält man:

$x^2 - (a + b)\,x + a\,b = P\,Q$

$x^3 - (a+b+c)x^2 + (ab + ac + bc)x - abc = PQR$

$x^4 - (a+b+c+d)x^3 + (ab+ac+bc+ad+bd+cd)x^2$
$- (abc + abd + acd + bcd)\,x + abcd = PQRS$

I. Zusatz: So oft ein Product einfacher Factoren nochmal mit einem neuen Factor multiplicirt wird, so wächst der Exponent von x um 1, mithin geben n einfache Factoren eine Gleichung vom nten Grade.

II. Zusatz: Jede dieser erhaltenen Gleichungen wird $= o$, wenn einer von den Factoren $= o$ ist; so z. B. wird die quadratische Gleichung $= o$, wenn entweder $(x - a) = P = o$ wird, oder aber wenn $(x - b) = Q = o$ wird.

III. Zusatz: In obigen Gleichungen kann x so viele Werthe haben, oder die Gleichung so viele Wurzeln enthalten (§. 148. Zus. c), als einfache Factoren vorhanden sind, denn z. B. die quadratische Gleichung wird allemal $= o$, es mag P, oder Q u. s. w. $= o$ seyn, mithin $x - a = o$, und $x = a$, oder $x - b = o$; und $x = b$. Folglich wird die Gleichung $= o$, man mag a, oder b u. s. w. für x substituiren; nur muß man nicht irrig annehmen, daß x zugleich a, und b seyn könne, sondern x kann entweder a, oder es kann b u. s. w. seyn, und in jedem Falle wird die Gleichung $= o$.

IV. Zu=

IV. Zusatz: In obigen Gleichungen ist allemal der Coefficient des zweyten Gliedes die Summe aller Wurzeln, der Coefficient des dritten Gliedes die Summe ihrer Amben, jener des 4ten Gliedes enthält alle Ternen der Wurzeln u. s. w. Der Coefficient des letzten Gliedes ist allemal das Product aller Wurzeln.

§. 170.

Lehrsatz:

Jede quadratische Gleichung ist ein Product zweyer einfacher Factoren, d. i.

$x^2 + px + q = o = (x - a)(x - b) = PQ$ (§. 165 III. Zus. a)

Beweis:

1. $(x - a)(x - b) = PQ = x^2 - (a + b)x + ab$ §. 169

2. Setzet man nun $p = -(a + b)$, und $q = ab$, so lassen sich aus diesen 2 Gleichungen für jedes p und q die Werthe von a und b bestimmen (§. 153 u. 167. II. Zus.)

nemlich $-a = \frac{1}{2}p + \sqrt{(\frac{1}{4}p^2 - q)}$

$-b = \frac{1}{2}p - \sqrt{(\frac{1}{4}p^2 - q)}$

folglich ist

3. allemal $x^2 + px + q = x^2 - (a + b)x + ab =$
$(x - a)(x - b) = PQ$

I. Zu=

I. Zusatz: Jede quadratische Gleichung enthält zwey Wurzeln a und b; denn sie ist ein Product der beyden Factoren $x - a$, und $x - b$; welches $= o$ wird, man mag für x die Größe a oder b substituiren (§. 169. III. Zus. und §. 156. §. 158.)

II. Zusatz: In einer quadratischen Gleichung giebt es ausser den zweyen a, b keine andere von diesen verschiedene Wurzeln; denn gäbe es noch andere Wurzeln c, d, folglich $x^2 + px + q = (x-a)(x-b) = (x-c)(x-d) = o$ wäre, so müßte in den beyden Producten ein Factor $= o$ seyn, weil das ganze Product $= o$ ist, mithin z. B. $x - a = o$, und $x - c = o$, folglich $x = a = c$, d. i. c ist keine von a unterschiedene Wurzel.

III. Zusatz: In jeder quadratischen Gleichung sind die beyden Wurzeln entweder beyde möglich, oder beyde unmöglich, je nachdem $\frac{1}{4}p^2 - q$ entweder positiv oder negativ ist. Man vergleiche §. 158 Zus.

IV. Zusatz: In jeder quadratischen Gleichung gilt das für die Coefficienten angeführte Gesetz §. 169. IV. Zus.

§. 171.

Lehrsatz:

Jede Gleichung vom nten Grade läßt sich in n einfache Factoren auflösen, oder

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + Cx^{n-3} \ldots\ldots$$
$$\ldots + Px + Q = (x-a)(x-b)(x-c)\ldots\ldots$$

Be-

Beweis:

1. Durch die Multiplication n einfacher Factoren entsteht eine Gleichung, deren erstes Glied $= x^n$ ist.

2. Kommen dadurch alle nächstniedere Potenzen von x bis auf x^0 vor, mithin entsteht eine Gleichung von n + 1 Gliedern.

3. Setzet man den Coefficienten des zweyten Gliedes $= A$, jenen des dritten $= B$ u. s. f. so bekömt man zwischen den Coefficienten n Gleichungen, so das sich allemal daraus n Grösen a, b, c u. s. f. bestimmen lassen.

I. Zusatz: Jede Gleiche vom nten Grade enthält n Wurzeln; denn da sie aus n Factoren $(x - a)(x - b)(x - c)$ .... besteht, so wird die Gleichung $= o$, wenn was immer einer von den n Factoren o wird, mithin für $x - a = o$, ist $x = a$, für $(x - b) = o$, wird $x = b$ u. s. f. man nennt auch so einen Factor eine Wurzelgleichung.

II. Zusatz: Wenn man eine Gleichung vom nten Grade z. B. $Z = o$ durch einen einfachen Factor oder Wurzelgleichung $(x - a)$ dividirt, so ist der Quotient $Z : (x - a) = Y$ eine Gleichung vom n — 1ten Grade.

III. Zusatz: Ausser den gefundenen n Wurzeln a, b, c .... giebt es in einer Gleichung vom nten Grade keine von den vorigen verschiedene Wurzel z. B α denn wäre α eine Wurzel der Gleichung Z, so

muß-

müßte $Z : (x - \alpha) = Y = 0$ seyn, und $Z = (x - \alpha) Y = 0$; da aber $Z = 0$; so muß einer der einfachen Factoren $(x - a)(x - b) \ldots$ ebenfalls 0 seyn, z. B. $x - a = 0$; so das $Z = (x - a) Y = 0$, und $x - a = 0 = x - \alpha$ mithin $x = a = \alpha$, also α keine von a verschiedene Wurzel ist.

§. 172.

Lehrsatz:

Die für die Coefficienten §. 169. IV. Zusatz angeführten Gesetze gelten allgemein für jede Gleichung.

Beweis:

1. Wenn diese Gesetze für jede Gleichung irgend eines Grades gelten, so gelten sie auch bey der Gleichung vom nächsthöhern Grade: Nun ist ihre Gültigkeit für quadratische, cubische, und biquadratische Gleichungen aus §. 169 durch Induction bewiesen, folglich gelten diese Gesetze der Coefficienten für die Gleichungen vom fünften, aus diesen für die Gleichungen vom sechsten, und so immer für die Gleichungen vom nächst höhern Grade.

2. Man nehme nun an, diese Gesetze gelten für alle Gleichungen irgend eines Grades n, und multiplicire die Gleichung dieses Grades mit einer neuen Wurzelgleichung z. B. $x - \alpha$ so erhält man im Producte eine Gleichung vom $n + 1$ ten Grade; das ist:

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + Cx^{n-3} + \ldots + Px + Q = Z$$
$$\times (x - \alpha)$$

$$\left.\begin{matrix} x^{n+1} \\ -\alpha \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} +A \\ -A\alpha \end{matrix}\right\} x^n \left.\begin{matrix} +B \\ -B\alpha \end{matrix}\right\} x^{n-1} \left.\begin{matrix} +C \\ -C\alpha \end{matrix}\right\} x^{n-2} + \ldots$$

$$\left.\begin{matrix} x^{n-3} + \ldots + P \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{matrix}\right\} x^2 \left.\begin{matrix} +Q \\ -P\alpha \end{matrix}\right\} x \; -Q\alpha = Z(x-\alpha)$$

3. Nun finden in dieser Gleichung Z. $(x - \alpha)$ die angeführten Gesetze der Coefficienten statt, wenn in der vorhergehenden Gleichung Z die Coefficienten diesen Gesetzen gemäß waren, nemlich:

a. Der Coefficient des zweyten Gliedes besteht aus der Summe aller Wurzeln, den wenn A die Summe von n Wurzeln darstellt, so enthält $A - \alpha$ offenbar $n + 1$ Wurzeln.

b. Der Coefficient vom dritten Gliede besteht aus der Summe aller Amben der Wurzeln, denn enthält B alle Amben von n Wurzeln, so fasset $B - A\alpha$ alle Amben von $n + 1$ Wurzeln (§. 144)

c. auf ähnliche Art erhellet, das der Coefficient $C - B\alpha$ vom vierten Gliede alle Ternen, u. s. f. und überhaupt der Coefficient vom $m + 1$ten Gliede die Summe aller Verbindungen nach m darstellet, (145 I. Zus.).

d. Das letzte Glied, oder der Coefficient von x^0 im letzten Gliede ist endlich wieder das Product aller Wurzeln, denn ist Q ein Product aus n Wurzeln, so ist offenbar Q α ein Product aus $n + 1$ Wurzeln.

4. Da nun der Obersatz von Nr. 1 erwiesen ist, so ist dadurch die Allgemeinheit der Gesetze, mithin der aufgestellte Satz erwiesen.

I. Zusatz: Der Coefficient des zweyten Gliedes ist positiv, negativ, oder Null, je nachdem die Summe der positiven Wurzeln größer, kleiner, oder gleich der Summe der negativen Wurzeln ist.

II. Zusatz: Fehlet das letzte Glied, so ist eine Wurzel $= o$; denn da das letzte Glied das Product aller Wurzeln ist, so muß nothwendig ein Factor davon, eine Wurzel nemlich o seyn, wenn das Product $= o$ ist.

III. Zusatz: Allemal sind so viele Wurzeln $= o$, als letzte Glieder fehlen; denn fehlet das letzte, so ist nach vorigem Zusatze eine Wurzel o; dividirt man nun mit diesem einfachen Factor, so wird in der neuen Gleichung des Quotienten (§. 171 II. Zus.) das vorige vorletzte nun das letzte Glied ist also dieses wieder o, so muß abermal eine Wurzel $= o$ seyn, u. s. f.

IV. Zusatz: Wenn das letzte Glied ein mögliche Größe ist, so muß eine Gleichung von ungerader Ordnung oder von der Ordnung $2n+1$, wenigst eine reelle Wurzel haben, denn sonst könnte das Product keine mögliche Größe geben, aber bey einer Gleichung von gerader Ordnung können alle Wurzeln imaginär seyn, weil eine gerade Anzahl unmöglicher Factoren doch eine mögliche Größe im Producte geben kann.

V. Zusatz: Die Anzahl der reellen Wurzeln ist bey ungerader Ordnung der Gleichung allemal ungerade, bey gerader Ordnung der Gleichung allemal gerad.

§. 173.

Aufgabe:

Aus einer gegebenen Gleichung das zweyte Glied wegzuschaffen.

Auflösung:

1. Man dividire den Coefficienten des zweyten Gliedes der gegebenen Gleichung durch den Exponenten des ersten Gliedes.

2. Statt der unbekannten Größe z. B. x setze man die Differenz einer andern unbekannten Größe und des gefundenen Quotienten in der gegebenen Gleichung; so erhält man

3. eine neue Gleichung, in welcher das zweyte Glied eliminirt ist.

I. Beyſpiel:

Man ſoll aus $x^2 - 6x + 5 = 0$ das zweyte Glied eliminiren:

$-6 : 2 = -3$. (Nr. 1); $x = y + 3$ (Nro 2) mithin

$$x^2 = y^2 + 6y + 9$$
$$-6x = \quad -6y - 18$$
$$+5 = \quad +5$$

$$x^2 - 6x + 5 = y^2 - 4 = 0$$

II. Beyſpiel:

Man ſoll aus nachſtehender Gleichung das zweyte Glied eliminiren:

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0.$$

$a : 3 = \frac{a}{3}$; und $x = y - \frac{a}{3}$, folglich

$$x^3 = y^3 - ay^2 + \frac{a^2 y}{3} - \frac{a^3}{27}$$
$$+ax^2 = \quad +ay^2 - \frac{2a^2}{3}y + \frac{a^3}{9}$$
$$+bx = \quad +by - \frac{ab}{3}$$
$$+c = \quad +c$$

$$x^3 + ax^2 + bx + c = y^3 + \left(b - \frac{a^2}{3}\right)y + \frac{2a^3}{27} - \frac{ab}{3} + c = 0$$

V. Abschnitt.

Von der Auflösung höherer Gleichungen.

§. 174.

Aufgabe:

Anzugeben, ob und welche ganze Zahlen eine gegebene Gleichung zu Wurzeln hat.

Auflösung:

1. Man zerfälle das letzte Glied in seine Factoren.
2. Substituire in der Gleichung für x, einen Factor nach dem andern sowohl mit dem Zeichen + als —;
3. Bringen nun einer oder mehrere davon die gegebene Gleichung auf o, so sind sie Wurzeln dieser Gleichung;
4. Im Gegentheile hat die Gleichung gar keine ganze Zahl zur Wurzel.

Beweis:

Das letzte Glied einer Gleichung ist allemal das Product aller Wurzeln (§. 172. Nr. 3. d), mithin kann keine Zahl, die nicht ein Factor des letzten Gliedes ist, eine Wurzel der gegebenen Gleichung seyn.

Beyspiel:

In der Gleichung $x^3 - x - 6 = o$

besteht das letzte Glied aus folgenden Factoren 1, 2, 3, 6.

Nun ist für x = 1 ; 1 — 1 — 6 = — 6

= . . x = — 1 ; — 1 — 1 — 6 = — 8

. . . . x = 2 ; 8 — 2 — 6 = 0

x = — 2 ; — 8 — 2 — 6 = — 16

x = 3 ; 27 — 3 — 6 = 18

x = — 3 ; — 27 — 3 — 6 = — 36

x = 6 ; 216 — 6 — 6 = 204

x = — 6 ; — 216 — 6 — 6 = — 228

Mithin ist nur die ganze Zahl 2 eine Wurzel der gegebenen Gleichung.

§. 175.

Aufgabe:

Die Wurzeln einer quadratischen d. i. nachstehenden Gleichung zu finden:

$$x^2 + px + q = 0$$

I. Auflösung:

1. Fehlet das 2te Glied, oder ist $px = 0$, so löse man solche nach §. 156 auf.

2. Ist hingegen das zweyte Glied vorhanden, so bestimme man die Wurzeln aus §. 158.

II. Auflösung:

1. Man schaffe das zweyte Glied weg (§. 173)

2. Behandle die neue Gleichung nach §. 156.

3. Aus den gefundenen Werthen von y, bestimme man jene von x.

Beyspiel der II. Auflösung der Gleichung:

$$x^2 + px + q = o$$

$p:2 = \frac{1}{2}p$; $x = y - \frac{1}{2}p$; mithin . . . .

$$x^2 = y^2 - py + \tfrac{1}{4}p^2$$
$$px = +py - \tfrac{1}{2}p^2$$
$$q = +q$$

$$x^2 + px + q = y^2 - \tfrac{1}{4}p^2 + q = o$$
$$y^2 = \tfrac{1}{4}p^2 - q;\quad y = \pm\sqrt{(\tfrac{1}{4}p^2 - q)}$$

folglich $x = -\frac{1}{2}p \pm \sqrt{(\frac{1}{4}p^2 - q)}$

Zusatz: Jede Gleichung von der Form: $x^{2n} + ax^n +$ $b = o$ kann man, wenn $y = x^n$ gesetzt wird, wie eine quadratische Gleichung behandeln; denn man erhält: $x^{2n} + ax^n + b = y^2 + ay + b = o$, welche letztere Gleichung quadratisch ist.

§. 176.

Aufgabe:

Die Wurzeln einer reinen cubischen Gleichung zu finden.

Auflösung:

1. Man reducire die gegebene Gleichung so, daß auf einer Seite der Cubus der unbekannten Größe positiv und nur einmal zu stehen kömmt, und auf der andern Seite lauter bekannte Größen sich befinden;

2. Ziehe nun zu beyden Seiten die Cubicwurzel aus, so erhält man eine Wurzel, mithin auch einen einfachen Factor der Gleichung, d. i. eine Wurzelgleichung,

3. mq nieser dividire man die gegebene Gleichung, die vorher geordnet werden muß (§. 165.), so bekömt man zum Quotienten eine quadratische Gleichung, welche

4. die übrigen zwey Wurzeln giebt.

Beyspiel: $x^3 - a = 0$; so ist $x = \sqrt[3]{a}$, und

$$\left.\begin{array}{l} x^3 - a = 0 \\ (x - \sqrt[3]{a}) = 0 \end{array}\right\} x^2 + x\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{a^2} = 0$$

$$x^3 - x^2\sqrt[3]{a}$$

$$- \quad +$$

$$x^2\sqrt[3]{a} - a$$

$$(x - \sqrt[3]{a})$$

$$x^2\sqrt[3]{a} - x\sqrt[3]{a^2}$$

$$- \quad +$$

$$x\sqrt[3]{a^2} - a$$

$$(x - \sqrt[3]{a})$$

$$x\sqrt[3]{a^2} - a$$

$$- \quad +$$

$$0$$

Aus $x^2 + x\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{a^2} = 0$ wird nach §. 175.

$$x = -\tfrac{1}{2}\sqrt[3]{a} \pm \sqrt{(\tfrac{1}{4}\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{a^2})} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{a}$$

folglich hat x folgende 3 Werthe

$$\sqrt[3]{a};\ \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{a};\ \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{a}$$

So

So hat die Gleichung $x^3 = 8$ folgende 3 Wurzeln.

$2, \frac{-1+\sqrt{-3}}{2} \times 2; \frac{-1-\sqrt{-3}}{2} \times 2$ oder

$2, -1+\sqrt{-3}; -1-\sqrt{-3}$

§. 177.

Aufgabe:

Eine cubische Gleichung aufzulösen, oder die Wurzeln nachstehender Gleichung anzugeben:

$$x^3 + ax^2 + bx + c = o$$

Auflösung:

1. Durch Eliminirung des zweyten Gliedes (§. 173.) schaffe man die gegebene in folgende Gleichung um:

$$y^3 - fy - g = o, \text{ also } y^3 = fy + g,$$

2. Nun setze man:

$$y^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3 = (A+B)^3$$

$$\text{also } y = A + B$$

$$\text{oder } y^3 = A^3 + B^3 + 3AB(A+B) = A^3 + B^3 + 3ABy$$

3. Ferner nehme man $A^3 = p$, $B^3 = q$, mithin

$$A = \sqrt[3]{p}; \; B = \sqrt[3]{q}: \; AB = \sqrt[3]{pq}, \text{ folglich}$$

$$y^3 = 3y\sqrt[3]{pq} + p + q, \text{ wo } y = \sqrt[3]{p} + \sqrt[3]{q} \text{ ist}$$

4. Diese letztere Gleichung mit jener Nr. 1 verglichen wird $fy + g = 3y\sqrt[3]{pq} + p + q$, folglich

$f = 3\sqrt[3]{pq}$; $g = p + q$ aus welchen 2 Gleichungen sich jedesmal p und q bestimmen lassen.

5. Nem-

5. Nemlich

$$f = 3\sqrt[3]{pq} \qquad \begin{cases} g = p + q \\ g^2 = p^2 + 2pq + q^2 \\ g^2 - \frac{4}{27}f^3 = p^2 - 2pq + q^2 \\ \sqrt{(g^2 - \frac{4}{27}f^3)} = p - q \end{cases}$$

$$\frac{1}{27}f^3 = pq$$

$$\frac{4}{27}f^3 = 4pq$$

Folglich nach §. 86. wird $p = \frac{g + \sqrt{(g^2 - \frac{4}{27}f^3)}}{2}$

$$q = \frac{g - \sqrt{(g^2 - \frac{4}{27}f^3)}}{2}$$

6. Und $A = \sqrt[3]{p} = \sqrt[3]{\left(\frac{g + \sqrt{(g^2 - \frac{4}{27}f^3)}}{2}\right)}$

$$B = \sqrt[3]{q} = \sqrt[3]{\left(\frac{g - \sqrt{(g^2 - \frac{4}{27}f^3)}}{2}\right)}$$

7. Mithin

$$y = A + B = \sqrt[3]{\left(\frac{g + \sqrt{(g^2 - \frac{4}{27}f^3)}}{2}\right)} + \sqrt[3]{\left(\frac{g - \sqrt{(g^2 - \frac{4}{27}f^3)}}{2}\right)}$$

8. Aus dem gefundenen Werthe von y, bestimme man jenen von $x = y - \frac{a}{3}$, so erhält man eine Wurzel der gegebenen Gleichung, mithin auch eine Wurzelgleichung derselben;

9. Man dividire endlich die gegebene Gleichung durch die gefundene Wurzelgleichung, und bestimme aus dem Quotienten, welcher eine quadratische Gleichung seyn wird (§. 171. II. Zus.) die übrigen zwey Wurzeln der Gleichung, so das also alle drey Wurzeln (§. 171. I. Zus.) gefunden, mithin die Aufgabe aufgelöset ist.

Aus-

Anmerkung:

Diese Auflösung erfanden Scipio Ferreus von Bononien, und Nicolaus Tartalia, und Cardan machte sie in seiner Algebra bekannt, daher sie dann Cardans Regel heißt.

Zusatz:

Jede Gleichung von der Form: $x^{3n} + ax^{2n} + bx^n + c = o$ läßt sich wie eine cubische behandeln, denn man setze $x^n = y$; so wird $x^{3n} + ax^{2n} + bx^n + c = y^3 + ay^2 + by + c = o$.

§. 178.

Aufgabe:

Die vier Wurzeln einer reinen biquadratischen Gleichung zu suchen.

Auflösung:

1. Man ziehe aus der gegebenen Gleichung die Quadratwurzel aus, so erhält man zwey quadratische Gleichungen.

2. Aus jeder dieser Gleichung ziehe man aufs neue die Quadratwurzel aus, so bekömt man aus jeder zwey, also im Ganzen die vier verlangten Wurzeln die gegebenen biquadratischen Gleichung.

Z. B. $x^4 - a = o$; also $x^4 = a$; und $x^2 = \pm\sqrt{a}$

Nro. 1. oder $x^2 = +\sqrt{a}$; mithin $x = \pm\sqrt[4]{a}$

ebenso $x^2 = -\sqrt{a}$; also $x = \pm\sqrt{(-\sqrt{a})} = \pm\sqrt{(-a^{\frac{1}{2}})} = \pm\sqrt{(a^{\frac{1}{2}} \times \sqrt{-1})} = \pm\sqrt[4]{a}\sqrt[4]{-1}$

Folglich hat x folgende 4 Werthe:

$+\sqrt[4]{a}, -\sqrt[4]{a}; +\sqrt[4]{a}\sqrt{-1}; -\sqrt[4]{a}\sqrt{-1}$

wovon zwey möglich, und zwey unmöglich sind.

Für die Gleichung $x^4 - 16 = 0$, sind die vier Wurzeln $+2, -2; +2\sqrt{-1}; -2\sqrt{-1}$.

§. 179.

Lehrsatz:

Wenn p q r die drey Wurzeln für die allgemeine Form cubischer Gleichungen: $Z^3 - fZ^2 + gZ - h = 0$ sind, so ist $\sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r}$ eine Wurzel einer jeden biquadratischen Gleichung, in welcher das zweyte Glied fehlet.

Beweis:

1. Sind p q r die drey Wurzeln der cubischen Gleichung: $Z^3 - fZ^2 + gZ - h = 0$, so muß

2. $p + q + r = f$; $pq + pr + qr = g$; $pqr = h$ seyn (§. 172)

3. Man setze $x = \sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r}$; so ist

$$x^2 = p + q + r + 2\sqrt{pq} + 2\sqrt{pr} + 2\sqrt{qr} = f + 2\sqrt{pq} + 2\sqrt{pr} + 2\sqrt{qr};$$

$$x^2 - f = 2\sqrt{pq} + 2\sqrt{pr} + 2\sqrt{qr};$$

$$x^4 - 2fx^2 + f^2 = 4pq + 4pr + 4qr + 8\sqrt{p^2qr} + 8\sqrt{pq^2r} + 8\sqrt{pqr^2}$$

$$= 4g + 8\sqrt{pqr}(\sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r})$$

$$= 4g + 8\sqrt{h} \times x;$$

x^4

$$x^4 - 2fx^2 - 8x\sqrt{h} + f^2 - 4g = 0$$

4. Diese Gleichung ist eine allgemeine Formel für jede biquadratische Gleichung, deren zweytes Glied fehlet, und eine Wurzel dieser Gleichung ist $\sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r}$.

Zusatz: Da jede Quadratwurzel zwey Werthe hat, das ist von $\sqrt{p}$, $\sqrt{p}$, $\sqrt{r}$ jede positiv, oder negativ seyn kann, so sind durch $x = \sqrt{p} + \sqrt{q} \sqrt{r}$ allemal alle vier Wurzeln der biquadratischen Gleichung auf einmal gefunden; denn allemal muß $\sqrt{pqr} = \sqrt{h}$ seyn, wenn nun $\sqrt{h}$ positiv ist so kann x folgende 4 Werthe haben: $\sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r}$; $\sqrt{p} - \sqrt{q} - \sqrt{r}$; $-\sqrt{p} + \sqrt{q} - \sqrt{r}$; $-\sqrt{p} - \sqrt{q} + \sqrt{r}$; ist hingegen $\sqrt{h}$ negativ, so sind die vier Werthe von x: $\sqrt{p} + \sqrt{q} - \sqrt{r}$; $\sqrt{p}\sqrt{q} + \sqrt{r}$; $-\sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r}$; $-\sqrt{p} - \sqrt{q} - \sqrt{r}$; In jedem speciellen Falle ist nun allemal bestimmt; ob $\sqrt{h}$ positiv oder negativ zu nehmen sey, mithin allemal gegeben, welche 4 Wurzeln zu nehmen seyen.

§. 180.

Aufgabe:

Die vier Wurzeln einer biquadratischen Gleichung zu suchen, d. i. nachstehende Gleichung aufzulösen.

$$y^4 + Ay^3 + By^2 + Cy + D = 0$$

Auflösung:

1. Man eliminire aus dieser Gleichung das zweyte Glied (§. 173), das ist, man bringe sie auf nachstehende Form: $x^4 - ax^2 - bx - c = 0$

2. Subsumire diese unter nachstehende des 179 §. oder $x^4 - ax^2 - bx - c = x^4 - 2fx^2 + 8x\sqrt{h} + f^2 - 4g = 0$; so ist $2f = a$; mithin $f = \frac{1}{2}a$;

$8\sqrt{h} = -b$; $\sqrt{h} = -\frac{1}{8}b$; $h = \frac{b^2}{64}$

$f^2 - 4g = -c = \frac{1}{4}a^2 - 4g$; $g = \frac{1}{16}a^2 + \frac{1}{4}c$

3. Aus diesen gefundenen Werthen von f, h, g bilde man die cubische Gleichung: $Z^3 - fz^2 + gz - h = o$ (§. 179.), und bestimme ihre drey Wurzeln p, q, r aus §. 177.

4. So erhält man die verlangten vier Wurzeln der biquadratischen Gleichung Nro. 1. indem man $x = +\sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r}$ setzt, wo zugleich aus $\sqrt{h} = \frac{1}{8}b$ bestimmt ist, welche Werthe aus §. 179 Zus. man nehmen soll.

5. Weil endlich $y = x - \frac{1}{4}A$ (§. 173.), so sind auch alle vier Wurzeln der gegebenen Gleichung gefunden, mithin die Aufgabe aufgelöset.

Anmerkung. Für höhere, als biquadratische Gleichungen hat man noch zur Zeit keine allgemeine Auflösungsmethode in der Allgebra.

§. 181.

Erklärungen:

a **Gränzen einer Wurzel** heißen jene Zahlen, zwischen welchen eine Wurzel der Gleichung fällt;

b **Gränzen der Wurzeln** sind jene Zahlen, zwischen welchen alle Wurzeln einer Gleichung fallen.

§. 182.

Aufgabe:

Die Gränzen der Wurzeln einer Gleichung zu finden.

Auflösung:

Es giebt hier verschiedene Methoden, wovon nur eine hier angeführt wird, nemlich durch Versetzung der Glieder, und selbst diese, da sie durch die Natur der gegebenen Coefficienten verschieden modificirt wird, läßt sich nur in einem Beyspiele verständlich machen, z. B. $x^5 + 2x^4 - 10x^3 + 2x^2 + 4 = 0$

1. Man übersetze das negative Glied auf die andere Seite der Gleichung, $x^5 + 2x^4 + 2x^2 + 4 = 10x^3$;

2. Offenbar ist nun $x^5 < 10x^3$; oder $x^2 < 10$, mithin $x < \sqrt{10}$; oder $x < 3,2\ldots$

3. Ebenso ist $2x^4 < 10x^3$; und $2x < 10$; und $x < 5$.

4. Ferner $2x^2 < 10x^3$; also $1 < 5x$; mithin $x > \frac{1}{5}$; oder $x > 0,2$.

5. Endlich ist $10x^3 > 4$; und $x^3 > 0,4$, folglich $x > 0,7$

folglich sind 0,7 und 3,2 die nächsten Gränzen, zwischen welchen die positiven Wurzeln fallen.

§. 183.

§. 183.

Aufgabe:
Die Wurzeln einer Gleichung durch Annäherung zu finden.

Auflösung:

1. Es sey entweder durch §. 174 oder §. 182. eine Zahl n gefunden, die für x substituirt die Gleichung beynahe auf o bringt, aber es sey noch $x > n$.
2. Man nehme $x = n + p$, so wird p ein ächter Bruch seyn, dessen Potenzen also, da es ohnehin nur auf eine Annäherung ankömt, im Verhältnisse zu n weggelassen werden können.
3. Man substituire in der gegebenen Gleichung für x die Größe $n + p$, lasse die Potenzen von p weg, nnd und bestimme den Werth von p aus dieser Gleichung, so wird $n + p$ der Wurzel näher kommen.
4. Man setze nun in der Gleichung statt x den gefundenen Werth von $n + p$, und wenn diese Wurzel noch zu klein ist, so suche man durch Wiederholung des vorigen Verfahrens, in dem man wieder $(n + p) = p$ nimmt, und abermal p bestimmet, eine Größe $n + p$, die der wahren Wurzel näher kömt.

I. Beyspiel: $x^2 = a$

Wenn $x > n$; also $x = n + p$ und

$$x^2 = n^2 + 2np + p^2 = n^2 + 2np = a$$

Folglich $p = \frac{a - n^2}{2n}$, und $x = n + \frac{a - n^2}{2n} = \frac{n^2 + a}{2n}$

So ist für $x^2 = 5$; $n = 2$; $p = \frac{5 - 4}{4} = \frac{1}{4}$;

$x = 2 + \frac{1}{4} = 2,25$

Wiederholet man dieses Verfahren, d. i. setzet man aufs neue $n = 2,25$; so wird $x = 2,2360\ldots$.

II. Bey=

II. Beyſpiel. $x^2 + ax - b = o$

für x, $n + p$ ſubſtituirt, giebt:

$x^2 + ax - b = n^2 + 2np + p^2 + an + ap - b = o$,

oder $2np + ap = b - n^2 - an$; $p = \frac{b - n^2 - an}{2n + a}$

Folglich $x = n + \frac{b - n^2 - an}{2n + a} = \frac{n^2 + b}{2n + a}$

III. Beyſpiel: $x^3 + ax^2 + bx + c = o$

für $x = n + p$ erhält man

$x^3 + ax^2 + bx + c = n^3 + 3n^2p + 3np^2 + p^3$
$+ an^2 + 2anp + ap^2 + bn + bp + c = o$;

$3n^2p + 2anp + bp = -n^3 - an^2 - bn - c$;

$p = -\frac{n^3 + an^2 + bn + c}{3n^2 + 2an + b}$

$x = n - \frac{n^3 + an^2 + bn + c}{3n^2 + 2an + b} = \frac{2n^3 + an^2 - c}{3n^2 + 2an + b}$

Zuſatz: Wenn die gefundene Zahl n zu groß iſt, ſo ſetze man $x = n - p$, und beſtimme p wie vorher, wo man für x die nemliche Formel erhält wie für $x = n + p$

VI Abſchnitt.

Von Functionen.

§. 184.

Erklärungen:

a Ein Größe heißt **beſtändig** (cònſtans) wenn ſie immer einerley Werthe behält, z. B. die durch Ziffern bezeichnete Zahlen;

b ſie

b sie ist hingegen unbeständig, oder veränderlich (variabilis), wenn sie jeden Werth, selbst jenen von o annehmen kann.

c Wenn man veränderliche mit beständigen Größen vergleicht, so bezeichnet man erstere durch die Endesbuchstaben x, y, z, u. s. f. die zweyten durch die ersten Buchstaben a, b, c des Alphabethes.

Anmerkung. Hier werden also die Anfangs- und Endesbuchstaben des Alphabethes in einer andern Bedeutung, als §. 148 Zus. genommen.

§. 185.

Erklärung:

Eine Function (functio) einer veränderlichen Größe z. B. x heißt jeder Ausdruck, der auf irge d eine Art aus dieser veränderlichen Größe, und aus beständigen Größen besteht, z. B. $a + 3x$; $ax + 4x^2$; $ax + b\sqrt{(a^2 - x^2)}$; a^x; u. s. f. sind Functionen von x.

I. Zusatz: Jede Function einer veränderlichen Größe x ist selbst eine veränderliche Größe; denn da man für die veränderliche Größe x jeden beliebigen Werth substituiren kann, so erhält dadurch die Function selbst jedesmal einen andern Werth, z. B. $3 + x = P$, so ist die Function von x, nemlich P veränderlich, denn P erhält die Werthe 3, 4, 5, 6 u. s. f. je nachdem man für x, 0, 1, 2, 3 setzet.

II. Zusatz: Ausdrücke, die zwar die äußere Form einer Function haben, aber einer beständigen Größe gleich

sind, gehören eigentlich nicht zu den Functionen, z. B. $x^0 = 1$; $1^x = 1$; $\frac{a^2 - ax}{a - x} = a$.

III. Zusatz: Da sich in einer Gleichung von zwey unbekannten Größen allemal eine durch die andere bestimmen läßt, so wird, wenn y eine Funktion von x ist, auch umgekehrt x eine Function von y seyn; das ist, wenn in einer Gleichung y durch x und beständige Größen bestimmet ist, so läßt sich aus dieser Gleichung eine andere herleiten, in welcher x durch y und beständige Größen bestimmet, mithin eine Function von y ist.

Z. B. $ax + by + c = o$, giebt $y = \frac{-ax - c}{b}$;

$x = \frac{-by - c}{a}$.

V. Zusatz: Substituiret man in der Gleichung $ax^2 + bx + cy^2 + dy + exy + f = o$ für $d + ex$, P; für $ax^2 + bx + f$, aber Q, so erhält obige Gleichung die Form: $cy^2 + Py + Q = o$, in welcher P sowohl als Q Functionen von x, in Rücksicht der Gleichung aber nur Glieder sind; man darf daher Functionen mit Gleichungen nicht verwechseln.

§. 186.

Erklärungen:

Eine Function heißt

a **algebraisch**, wenn sie sich in eine Gleichung von bestimmter Ordnung auflösen läßt, so daß nemlich jedem bestimmten Werthe der veränderlichen Größe, ein oder mehrere bestimmte Werthe der Function

tion selbst entsprechen; z. B. $Z^5 = x^2 + bx + a$, wo für jeden Werth von x der Function Z fünf bestimmte Werthe zukommen; (§. 171. 1 Zus.) **transcendent** hingegen, wenn das Gegentheil Statt hat, wo also allemal eine Gleichung von unendlichen Abmessungen erforderlich ist, z. B. $Z = a + bx$
$bx^2 + \ldots\ldots\ldots rx^\infty$

b **einförmig** (uniformis). oder **vielförmig** (multiformis), je nachdem der Function für jeden bestimmten Werth der veränderlichen Größe nur ein, oder mehrere bestimmte Werthe zukommen, z. B. $ax + b = y$, ist eine einförmige Function von x, denn für jeden Werth von x gehört zu y nur ein Werth; hingegen $ax - x^2 = y^2$; $ax^3 + bx = y^3$ sind vielförmige Functionen, und zwar erstere eine zw y-förmige, weil y für jeden Werth von x zwey, letztere eine **dreyförmige** Function, weil jedem Werthe von x, drey Werthe der Function y entsprechen.

c **entwickelt** (explicita) oder **verwickelt** (implicita), je nachdem sie sich durch algebraische Operationen von den veränderlichen Größen absondern läßt, oder nicht; so wenn Z eine Function der veränderlichen Größen x y u. s. f. ist, und man sie in einer Gleichung so darstellen kann, daß auf einer Seite Z allein, auf der andern alle übrige veränderliche Größen x, y zu stehen kommen, so heißt Z eine entwickelte Function, kann man aber durch alle bekannte algebraische Operationen Z nie so in einer Gleichung abgesondert darstellen, so ist Z eine verwickelte Function.

3. B $Z^2 = 2axZ - by^3$; wo $Z = ax \pm \sqrt{(a^2 x^2 - by^3)}$ (§. 159.) eine entwickelte Function von x ist; hingegen in der Gleichung $Z^5 - 2c^2 Z^4 x^2 + 5abZ^3 x^5 - 6b^2 x^7 Z = 5cx^3$ ist die Größe Z eine verwickelte Function von x, weil sich die Größe Z von x nicht absondern läßt. (§. 180. Anmerk.)

§. 187.

Erklärungen:

a Irrational heißt eine algebraische Function, wenn die veränderliche Größe mit einem gebrochenen Exponenten, oder einem Wurzelzeichen vorkömt; z. B. $a = b x^{\frac{2}{3}}$; $a + \sqrt{(a^2 - x^2)}$; im Gegentheile heißt sie

b Rational, z. B. $ax^3 - bx^4$; und zwar

α eine ganze rationale Function, wenn die Exponenten der veränderlichen Größen ganze positive Zahlen sind, und sie selbst nie als Nenner, oder Divisoren vorkommen,

β eine gebrochene rationale Function, wenn die veränderlichen Größen als Divisoren vorkommen, oder ihre Exponenten ganze negative Zahlen sind, z. B.

$\frac{a}{a+x}$; $a + bx^{-3}$.

§. 188.

Erklärungen:

Zwey Functionen mit einander verglichen

a haben einerley Form, wenn sie immer in einer-

ley

ley Gliedern die nemliche Potenzen ebenderselben veränderlichen Größe enthalten, z. B.

$Z = a + b\,x + c\,x^2\ d + x^3 + \ldots . m\,x^n$

$Y = \alpha + \beta\,x + \gamma\,x^2 + \delta\,x^3 + \ldots . \mu\ x^n$

b sind einander ähnlich, wenn die veränderlichen Größen mit eben denselben beständigen Größen auf einerley Art verknüpfet sind. Z. B.

$Z = a + b\,x + c\,x^2 + d\,x^3 + \ldots\ldots m\,x^n$

$Y = a + b\,y + c\,y^2 + d\,y^3 + \ldots\ldots m\,y^n$

§. 189.

Lehrsatz:

Wird die Function: $a + b\,x + c\,x^2 + d\,x^3 + \ldots = o$ für jedem Werth von x allemal $= o$; so müssen alle Coefficienten $= o$ seyn.

Beweis:

1. Da man für x alle Werthe, mithin auch o setzen kann; so werden dadurch alle Glieder der Reihe, die x enthalten $= o$, aber die ganze Reihe wird nur erst dann $= o$, wenn auch $a = o$ ist, mithin

$$b\,x + c\,x^2 + d\,x^3 + \ldots = o.$$

2. Man dividire alle Glieder mit x, so erhält man:

$b + cx + d\,x^2 + \ldots = o$,

wo wieder die ganze Function, mithin auch $b = o$ seyn muß; daher: $c\,x + d\,x^2 + \ldots = o$

3. dividirt man wieder mit x, so findet man das c und bey gesetzter Operation das d u. s. f. mithin daß alle Coefficienten unter angenommener Bedingung der Function $= o$ seyn müssen.

§. 190.

Lehrsatz:

In jeder Function von nachstehender Form:

$Ax^m + Bx^{m+d} + Cx^{m+2d} + Dx^{m+3d} + \ldots\ldots = o$

es mögen die Exponenten ganze oder gebrochene, positive oder negative Zahlen seyn, sind alle Coefficienten $= o$ ist.

Beweis:

1. Man dividire den ganzen Ausdruck durch x^m, so wird $A + Bx^d + Cx^{2d} + Dx^{3d} + \ldots\ldots = o$ wo offenbar $A = o$, (§. 189 Nro. 1.)

2. In der Reihe; $Bx^d + Cx^{2d} + Dx^{3d} + \ldots = o$

wenn d eine positive Zahl ist, so setze man $x^d = y$ so wird $By + Cy^2 + Dy^3 + \ldots\ldots = o$, wo wo wieder alle Coefficienten $= o$ sind, (§. 189)

3. Bezeichnet d eine negative Zahl z. B. $-e$,

so nehme man $\frac{1}{x} = y$; $x^d = \frac{1}{x^e} = y^e$, so verwandelt sich die Reihe $Bx^d + Cx^{2d} + Dx^{3d} + \ldots = o$ in nachstehende $By^e + Cy^{2e} + Dy^{3e} + \ldots = o$

4. Man dividire alle Glieder durch y^e so wird $B + Cy^e + Dy^{2e} + \ldots\ldots = o$ woraus sich wie §. 189 auf ähnliche Art ergiebt, daß B und so auch C, D u. s. f. $= o$ seyn müssen.

§. 191.

Aufgabe;

Die gebrochene Function $\frac{1}{a+x}$ in eine unendliche Reihe aufzulösen.

Auflösung;

1. Man setze; $\frac{1}{a+x} = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \ldots\ldots$ In dieser angenommenen Reihe kann x im ersten Gliede nicht vorkommen, weil die Function für $x = 0$ nicht verschwindet, sondern $= \frac{1}{a}$ wird.

2. Um nun die Coefficienten der angenommenen Reihe zu bestimmen, reducire man die Gleichung auf 0 (§. 149. III. Zus.) d. i.

$$1 = aA + aB\}x + aC\}x^2 + aD\}x^3 + \ldots\ldots$$
$$+ A\} \quad + B\} \quad + C\}$$

$$0 = aA - 1 + (aB + A)x + (aC + B)x^2 + (aD + C)x^3 + \ldots\ldots$$

3. Da nun alle Coefficienten $= 0$ sind (§. 189) so ist

$aA - 1 = 0$, mithin $A = \frac{1}{a}$;

$aB + A = 0$; $\quad B = -\frac{A}{a} = -\frac{1}{a^2}$

$aC + B = 0$; $\quad C = -\frac{B}{a} = +\frac{1}{a^3}$

aD

$a D + C = o$; $\quad D = -\frac{C}{a} = -\frac{1}{a^4}$

und so lassen sich alle Coefficienten der Nro. 1 angenommenen Reihe bestimmen.

4. Substituirt man in solcher die Werthe, so wird

$$\frac{1}{a+x} = \frac{1}{a} - \frac{x}{a^2} + \frac{x^2}{a^3} - \frac{x^3}{a^4} + \ldots\ldots$$

Zusatz: Auf die nemliche Art wenn man

$$\frac{1}{a-x} = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \ldots\ldots$$

setzet, so findet man

$$\frac{1}{a-x} = \frac{1}{a} + \frac{x}{a^2} + \frac{x^2}{a^3} + \frac{x^3}{a^4} + \ldots\ldots$$

II. Zusatz: In der Reihe für $\frac{1}{a+x}$ ist das allgemeine Glied $\pm \frac{x^{n-1}}{a^n}$; und für $\frac{1}{a-x}$ ist solches $+ \frac{x^{n-1}}{a^n}$ und beyde diese Ausdrücke sind wieder Functionen von n.

III. Zusatz: Beyde obige Reihen findet man auch, wenn man 1 durch $a + x$ oder $a - x$ dividirt, (§. 109): oder wenn man gleich in diesem 109ten §. für a die Zahl 1, statt $b + c$ aber $a + x$ substituirt, oder im ersten Zus. allda wieder $a = 1$; und $b - c = a - x$ setzet.

IV. Zu-

IV. Zusatz: Der Bruch $\frac{1}{a+x}$ läßt sich auch in eine unendliche Reihe verwandeln, wenn man

$$\frac{1}{a+x} = A + B\,x^{-1} + C\,x^{-2} + D\,x^{-3} + E\,x^{-4} + \ldots\ldots$$

setzet, denn man bringe diese Gleichung auf o, und bestimme aus §. 189 und 190 die Coefficienten, d. i.

$$1 = Ax + aA\}x^0 + aB\}x^{-1} + aC\}x^{-2} + aD\}x^{-3} + aE\}x^{-4} + \ldots.$$
$$+B\}\quad +C\}\quad +D\}\quad +E\}\quad +F\}$$

$$o = Ax + (aA+B-1)x^0 + (aB+C)x^{-1} + (aC+D)x^{-2} + (aD+E)x^{-3} + (aE+F)x^{-4} + \ldots$$

so ist $A = o$

$aA + B - 1 = o;$	$B = 1$
$aB + C = o;$	$C = -aB = -a$
$aC + D = o;$	$D = -aC = +a^2$
$aD + E = o;$	$E = -AD = -a^3$

Folglich diese Werthe substituirt, giebt

$$\frac{1}{a+x} = x^{-1} - a\,x^{-2} + a^2\,x^{-3} - a^3\,x^{-4} + \ldots\ldots \pm a^{n-1}\,x^{-n}$$

$$= \frac{1}{x} - \frac{a}{x^2} + \frac{a^2}{x^3} - \frac{a^3}{x^4} + \ldots \pm \frac{a^{n-1}}{x^n}$$

Diese Reihe bekömmt man wieder durch Division §. 109 wenn man 1 durch $x+a$ dividirt.

V. Zu-

V. Zusatz: Der Bruch $\frac{1}{a+x}$ läßt sich endlich noch in eine unendliche Reihe auflösen, wenn man

$\frac{1}{a+x} = A + Ba + Ca^2 + Da^3 + \ldots\ldots$ oder auch

$= A + Ba^{-1} + Ca^{-2} + Da^{-3} + \ldots\ldots$ setzet, überhaupt müssen allemal in der angenohmenen Reihe alle Potenzen von einem Gliede des Nenners vorkommen.

VI. Zusatz: $\frac{c-x}{a \pm x} = c - x\left(\frac{1}{a \pm x}\right) =$

$(c-x)\left(\frac{1}{a} \mp \frac{x}{a^2} + \frac{x^2}{a^3} \mp \frac{x^3}{a^4} + \ldots\ldots\right)$

VII. Zusatz: Um die Brüche $\frac{1}{a-x^2}$; oder $\frac{1}{a-\sqrt{x}}$ oder überhaupt $\frac{1}{a-x^m}$ in unendliche Reihen aufzulösen, muß man nach V zus.

$\frac{1}{a-x^2} = A + Bx^2 + Cx^4 + Dx^6 + \ldots\ldots$

$\frac{1}{a-\sqrt{x}} = A + Bx^{\frac{1}{2}} + Cx + Dx^{\frac{3}{2}} + Ex^2 + \ldots$

$\frac{1}{a-x^m} = B + Ax^m + Cx^{2m} + Dx^{3m} + \ldots$ setzen.

VIII. Zusatz: Soll man $\frac{1}{1+x+x^3}$ in eine unendliche Reihe auflösen, so setze man $x + x^3 = y$; mithin $\frac{1}{1+x+x^3} = \frac{1}{1+y}$

Nun

Nun ist $\frac{1}{1+y} = 1 - y + y^2 - y^3 + y^4 - \ldots$

(Aufgabe dieses §.)

Ferner ist $y = x + x^3$

$y^2 = x^2 + 2x^4 + x^6$

$y^3 = x^3 + 3x^5 + 3x^7 + y^9$

$y^4 = x^4 + 4x^6 + 6x^8 + 4x^{10} + x^{12}$

Folglich

$$\frac{1}{1+y} = \frac{1}{1+x+x^3} = 1 - x + x^2 - 2x^3 + 3x^4 - \ldots$$

§. 192.

Aufgabe:

Die irrationale Function $\sqrt{(1+x)}$ in eine unendliche Reihe aufzulösen.

Auflösung:

1. Man setze $\sqrt{(a+x)} = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \ldots$

2. So wird nach §. 163

$$a + x = \begin{matrix} A^2 + 2ABx + B^2 \\ + 2AC \end{matrix}\Big\}x^2 \quad \begin{matrix} + 2BC \\ + 2AD \end{matrix}\Big\}x^3$$

$$\begin{matrix} + C^2 \\ + 2BD \\ + 2AE \end{matrix}\Big\}x^4$$

$$= \begin{matrix} A^2 - a + 2AB \\ - 1 \end{matrix}\Big\}x \quad \begin{matrix} + B^2 \\ + 2AC \end{matrix}\Big\}x^2 \quad \begin{matrix} + 2BC \\ + 2AD \end{matrix}\Big\}x^3$$

$$\begin{matrix} + C^2 \\ + 2BD \\ + 2AE \end{matrix}\Big\}x^4$$

3. Folg-

3. Folglich $A^2 - a = 0$, und $A^2 = a$; $A = a^{\frac{1}{2}}$

4. $2AB - 1 = 0$; $B = \frac{1}{2A} = + \frac{1}{2a^{\frac{1}{2}}}$

5. $B^2 + 2AC = 0$; $C = - \frac{B^2}{2A} = - \frac{1}{4a}$:

$$2a^{\frac{1}{2}} = - \frac{1}{2.4a^{\frac{3}{2}}}$$

6. $2BC + 2AD = 0$; $D = - \frac{2BC}{2A} = - \frac{BC}{A} =$

$$- \left(\frac{1}{2a^{\frac{1}{2}}} \times - \frac{1}{2.4.a^{\frac{3}{2}}} \right) : a^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{2.4.2a^{\frac{4}{2}}} : a^{\frac{1}{2}} = \frac{1.3}{2.4.6a^{\frac{5}{2}}}$$

7. $C^2 + 2BD + 2AE = 0$; $E = - \frac{C^2 + 2BD}{2A} =$

$$- \left(\frac{1}{2.2.4.4a^{\frac{6}{2}}} + - \frac{1}{2.4.6a^{\frac{6}{2}}} \right) : 2a^{\frac{1}{2}} =$$

$$- \left(\frac{1.6}{2.4.6.8a^{\frac{5}{2}}} + \frac{1.3.8}{2.4.6.8a^{\frac{6}{2}}} \right) : 2a^{\frac{1}{2}} =$$

$$- \frac{30}{2.4.8a^{\frac{6}{2}}} : 2a^{\frac{1}{2}} = - \frac{15}{2.4.6.8a^{\frac{7}{2}}} = +$$

$$\frac{1.3.5}{2.4.6.8a^{\frac{7}{2}}}$$

8. Mithin wird,

$$\sqrt{(a+x)} = a^{\frac{1}{2}} + \frac{x}{2a^{\frac{1}{2}}} - \frac{x^2}{2.4a^{\frac{3}{2}}} +$$

$$\frac{1.3x^3}{2.4.6.a^{\frac{5}{2}}} - \frac{1.3.5.x^4}{2.4.6.8.a^{\frac{7}{2}}} + \ldots\ldots$$

Bey-

Beyspiel II.

Man verlanget $\sqrt{1,1}$; so setze man $a = 1$; $x = 0,1$

und $\sqrt{1,1} = 1 + \frac{1.0,1}{2} - \frac{1.3.0,01}{2.4} + \frac{1.3.5.0,001}{2.4.6}$

$- \frac{1.3.5.0,0001}{2.4.6.8} \pm \ldots$

Davon sind die positiven Glieder:

1.

0,05

0,0000625

0,000000002734375

1,05006277343 75

Die negativen Glieder:

— 0,00125

— 0,000000390625

— 0,000000002050....

— 0,00125392675

Das ist: + 1,05006277343

— 0,00125392675

$\sqrt{1,1} = 1,04880884668....$

Zusatz: Man findet die nemliche Reihe für $\sqrt{(a+x)}$ wenn man entweder nach §. 121 die Wurzel ausziehet, oder aber $\sqrt{(a+x)} = (a+x)^{\frac{1}{2}}$ nimmt, und nach §. 141 verfährt. Eben so bekömt man im gegebenen Beyspiele die nemliche Wurzel aus §. 126 oder §. 141.

§. 193.

Aufgabe:

Aus einer Gleichung zwischen zwey veränderlichen Grösßen x, y z. B.

$$y^3 + a^2 y + a x y - 2a^3 + x^3 = 0$$

die eine Grösße y durch eine Reihe, deren Glieder nach Potenzen von x geordnet sind, und deren Gestalt gegeben ist, z. B.

$$y = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \ldots$$

zu finden.

Auflösung:

1. Man bestimme aus der Reihe die Werthe für die in der gegebenen Gleichung vorkommende Potenzen von y, hier für y^3, so ist

$$y^3 = A^3 + 3A^2Bx + \left.\begin{matrix} 3AB^2 \\ 3A^2C \end{matrix}\right\} x^2 + \left.\begin{matrix} B \\ 6ABC \\ 3A^3D \end{matrix}\right\} x^3 + \ldots$$

2. Nun substituire man diese Werthe für y^3 und y in der gegebenen Gleichung, d. i.

$$\left.\begin{matrix} y^3 = A^3 + 3A^2B \\ a^2y = a^2A + a^2B \\ axy = + aA \\ -2a^3 = -2a^3 \\ -x^3 = \end{matrix}\right\} x \left\{\begin{matrix} +3AB^2 \\ +3^2AC \\ + a^2C \\ + aB \end{matrix}\right. \left.\begin{matrix} + B \\ +6ABC \\ +3A^3D \\ + a^2D \\ + aC \\ - 1 \end{matrix}\right\} x^2 + \ldots = 0$$

3. be=

3. bestimme die Coefficienten aus (§. 189 u. 190) nemlich

4. $A^3 + a^2 A - 2 a^3 = 0$; man suche den Werth von A entweder aus §. 177, oder durch Versuch, so findet man einen Werth für $A = a$, und wenn durch $A - a = 0$ die Gleichung dividirt wird, so erhält man zum Quotienten die quadratische Gleichung: $A^2 + a A + 2 a^2 = 0$, aus welcher man die übrigen zwey Werthe für A findet, nemlich $A = -\frac{1}{2} a \pm \sqrt{(\frac{1}{4} a^2 - 2a^2)}$ (§. 175.), welche beyde unmöglich sind, man nimmt daher den möglichen, oder $A = a$.

5. $3A^2B + a^2B + aA = 0$; nemlich
$3a^2 B + a^2 B + a^2 = 0$; $4a^2 B + a^2 = 0$; $4B + 1 = 0$; $B = -\frac{1}{4}$.

6. $3AB^2 + 3A^2C + a^2C + AB = 0$, oder
$3aB^2 + 3a^2C + a^2C + aB = 0$
$\frac{3}{16} a + 4a^2 C - \frac{1}{4} a = 0$
$4a^2 C - \frac{1}{16} a = 0$; $4aC - \frac{1}{16} = 0$;
$C = \frac{1}{64 . a}$

7. $B^3 + 6ABC + 3A^2D + a^2D + a C - 1 = 0$
$-\frac{1}{64} - \frac{6a}{4 . 64 a} + 3a^2 D + a^2 D + \frac{a}{64 a} - 1 = 0$
$-\frac{5}{64 . 2} + 4a^2 D - \frac{63}{64} = 0$.
$4a^2 D = \frac{131}{128}$; $D = \frac{131}{512 a^2}$.

8. Man

8. Man substituire die gefundenen Werthe der Coefficienten in der gegebenen Reihe, so wird

$$y = a - \tfrac{1}{4}x + \frac{x^2}{64a} - \frac{131\,x^3}{512a^2} + \ldots.$$

Anmerkung.

Die Auflösungen von den Aufgaben §. 191 — 193 setzen zum Voraus, daß man die Exponenten in den gesuchten Reihen, das ist, ihre Form schon wisse, und daß man nur noch die Coefficienten zu bestimmen habe, um nun jedesmal dieser angenommenen Reihe die gehörige Gestalt zu ertheilen, dient das Newtonianische Parallelogramm; dessen Theorie aber außer der Sphäre des gegenwärtigen Lehrbuches liegt.

V. Hauptstück.

Von Verhältnissen.

I Abschnitt.

Von Verhältnissen überhaupt.

§. 194.

Erklärungen:

a. Die Bestimmung der Grösse eines Dinges a durch Vergleichung mit einem andern b heißt ein **mathematisches Verhältniß** (ratio mathematica).

b. Die durch das Verhältniß bestimmte Grösse x nennet man den **Exponenten, Verhältnißzeiger**, die Dinge a, b, welche als Grössen miteinander verglichen werden, die **Glieder** (termini) des Verhältnisses, und zwar

α. das erste oder voranstehende, das **Vorderglied** (antecedens),

β. das zweyte oder nachstehende, das **Hinterglied** (consequens).

c. Ein Verhältniß heißt **abnehmend** oder **zunehmend**, je nachdem das Hinterglied kleiner, oder grösser als das Vorderglied ist.

§. 195.

Erklärungen:

a. Die Bestimmung der Zahl d, welche angiebt, um wie viel die eine Größe a kleiner, oder größer als die andere b ist, oder die Vergleichung zweyer Größen durch Subtraction heißt ein **arithmetisches Verhältniß**;

b. Das Zeichen des arithmetischen Verhältnisses ist (—), welches man zwischen die Glieder setzet, d. i. a — b.

I. Zusatz: Im arithmetischen Verhältnisse müssen die Glieder gleichartig seyn (§. 29. II. Zus.).

II. Zusatz: Die Größe des arithmetischen Verhältnisses ist durch die Größe des Exponenten, d. i. des Unterschiedes d bestimmt, und Verhältnisse von gleichen Exponenten sind einander gleich, d. i.:

7 — 2 = 9 — 4, wo in beyden Verhältnissen der Exponent d = 5 ist.

III. Zusatz: Zwey Verhältnisse, die einem dritten gleich sind, sind auch unter sich gleich; denn da jedes mit dem dritten den nemlichen Exponenten d hat, so ist auch d der gemeinschaftliche Exponent für beyde erste Verhältnisse.

IV. Zusatz: Das arithmetische Verhältniß zweyer gleichartigen, und durch einerley Maaß bestimmten Größen, ist dem Verhältnisse der Zahlen gleich, die ihnen als Coefficienten voranstehen, d. i.

ma — na = m — n

und 7 Schuhe — 2 Schuhe = 7 — 2

V. Zusatz: Jedes arithmetische Verhältniß läßt sich auf ein Verhältniß bloßer Zahlen reduciren.

§. 196.

Lehrsatz:

Jedes arithmetische Verhältniß ist unter nachstehender Formel enthalten: a — a + d.

Beweis:

1. Offenbar kann a jedes Vorder-, und b jedes Hinterglied, mithin a — b jedes arithmetische Verhältniß bezeichnen.

2. Nun ziehe man vom Hintergliede b das Vorderglied a ab, so wird ihr Unterschied d eine negative oder positive Zahl seyn, je nachdem das Verhältniß ab- oder zunimmt, (§. 38.) d. i. b — a = d, und b = a + d (§. 29. 1. Zus.).

3. Setzet man endlich für b N. 1. den so eben gefundenen Werth a + d, so erhält man a — a + d als den allgemeinen Ausdruck eines jeden arithmetischen Verhältnisses.

§. 197.

Erklärungen:

a. Die Bestimmung der Zahl m, oder wie und wie oft die Größe a, oder ein aliquoter Theil derselben genommen werden muß, um die Größe b zu erzeugen, heißt ein geometrisches Verhältniß, so wie die Zahl m der Exponent desselben.

b. Das geometrische Verhältniß heißt **rational**, oder **irrational**, je nachdem der Exponent desselben, oder m eine National= oder Irrationalzahl ist (§. 98).

c. Das Zeichen des geometrischen Verhältnisses ist (:), welches man zwischen die Glieder setzet, d. i. a:b.

I. **Zusatz**: Im geometrischen Verhältnisse müssen beyde Glieder, da eines aus dem andern, oder aus einem aliquoten Theile desselben erzeuget ist, gleichartig seyn.

II. **Zusatz**: Im geometrischen rationalen Verhältnisse wird eine Größe b durch die andere a, oder einen aliquoten Theil von ihr gemessen (§. 1. d.); daher heißen die Größen a und b **commensurable** Größen.

III. **Zusatz**: Wenn zwey Größen a, b in einem irrationalen Verhältnisse stehen, so läßt sich die eine b durch die andere a weder ganz, noch einem aliquoten Theile derselben genommen **genau** messen; man nennet daher solche Größen **incommensurable** Größen. Man kann aber von der einen Größe a immer kleinere aliquote Theile als Maaß nehmen, wodurch die andere Größe b um so genauer gemessen wird, je kleiner der aliquote Theil, oder das gebrauchte Maaß angenommen ist, und so läßt sich ein rationales Verhältniß finden, welches dem gegebenen irrationalen zwischen a und b so nahe kömt, daß man solches ohne merklichen Unterschied dafür setzen darf, oder wie man sich ausdrückt, jedes irrationales Verhältniß läßt sich durch Annäherung auf ein rationales,

tionales, und die beyde incommensurable Grösen auf commensurable reduciren.

IV. Zusatz: Jedes geometrische Verhältniß läßt sich durch a : ma ausdrücken; denn, wenn m den Exponenten bezeichnet, so ist b = ma, folglich das Verhältniß a : b = a : ma, wo aber m eine ganze oder gebrochene Zahl ist, je nachdem das Verhältniß ab- oder zunimmt.

V. Zusatz: Die Größe des geometrischen Verhältnisses ist durch die Größe des Exponenten bestimmet, und Verhältnisse von gleichen Exponenten sind gleich, z. B. 6 : 2 = 24 : 8.

VI. Zusatz: Zwey geometrische Verhältnisse, die einem dritten gleich sind, sind auch unter sich gleich; denn wenn sie mit dem dritten den nemlicheu Exponenten m haben, so ist solcher auch den beyden Verhältnissen gemeinschaftlich, und folglich sind beyde Verhältnisse einander gleich.

VII. Zusatz: Das geometrische Verhältniß zweyer Größen, die durch einerley Maaß bestimmet sind, ist dem Verhältnisse der Zahlen gleich, die bey ihnen als Coefficienten voranstehen, d. i.

ma : na = m : n, oder

24 fl : 8 fl. = 24 : 8.

VIII. Zusatz: Jedes geometrische Verhältniß zweyer gleichartigen Größen läßt sich auf das Verhältniß bloßer Zahlen reduciren. (III. u. VII. Zus.).

IX.

IX. Zusatz: Man erhält in jedem geometrischen Verhältnisse von bloßen Zahlen den Exponenten, wenn man das Hinterglied durch das Vorderglied dividirt: oder $ma : a = m$ (IV. Zus); das geometrische Verhältniß der Zahlen ist also ihre Vergleichung durch Division; daher mag es kommen, daß man zum geometrischen Verhältnißzeichen (§. 197.) das Divisionszeichen wählte.

§. 198.

Lehrsatz:

Das geometrische Verhältniß zweyer Zahlen bleibt unverändert, wenn man mit einer ganzen Zahl die beyden Glieder entweder

I. multiplicirt, d. i. $na : nb = a : b$, oder

II. dividirt, d. i. $\frac{a}{n} : \frac{b}{n} = a : b$,

Beweis:

von I. und II.

Man setze $\frac{b}{a} = m$ (§. 197. IX. Zus.),

so ist auch $\frac{nb}{na} = m$; und $\frac{b:n}{a:n} = m$ (§. 50. Zus.)

folglich $na : nb = a : b$; und $\frac{a}{n} : \frac{b}{n} = a : b$ (§. 197. V. Zus.).

I. Zusatz: Das Verhältniß zweyer Brüche ist dem Verhältnisse ihrer Zähler gleich, wenn man sie unter einerley Benennung bringt; d. i.:

$$\frac{p}{q} : \frac{r}{s} = \frac{ps}{qs} : \frac{qr}{qs} = ps : qr;$$

folglich läßt sich das Verhältniß zweyer Brüche allemal auf das Verhältniß ganzer Zahlen bringen.

II. Zusatz: Zwey Irrationalzahlen können in einem rationalen geometrischen Verhältnisse stehen, z. B.

$$4\sqrt{3} : 2\sqrt{3} = 4 : 2$$

III. Zusatz: Da man durch Annäherung Irrationalzahlen auf rationale bringen kann (§. 133.); so läßt sich jedes Irrationalverhältniß der Zahlen auf ein rationales durch Annäherung reduciren.

V. Zusatz: Da sich alle geometrische Verhältnisse auf Verhältnisse von bloßen Zahlen (§. 197. VIII. Zus.), alle Verhältnisse der Zahlen auf jene von ganzen Zahlen (I. u. III. Zus.) bringen lassen, so läßt sich jedes geometrische Verhältniß auf ein Verhältniß ganzer Zahlen reduciren.

§. 199.

Erklärungen:

Zwey gleiche Verhältnisse geben eine Proportion, und zwar

a. eine arithmetische, wenn beyde Verhältnisse arithmetisch,

b. eine geometrische, wenn sie beyde geometrische Verhältnisse sind.

I. Zusatz: Jede Proportion besteht aus 4 Gliedern, nemlich aus zwey Vorder- und zwey Hintergliedern.

II. Zusatz: Da sich die Verhältnisse allgemein auf Verhältnisse bloßer Zahlen reduciren lassen, (§. 195. V.

Zus. und §. 197, VIII. Zus.) so gilt dieses auch von Proportionen.

III. Zusatz: Jede geometrische Proportion läßt sich auf eine von ganzen Zahlen reduciren (§. 98. IV. Zus.)

Erklärungen:

Man nennet in einer Proportion

a. das erste und letzte Glied zusammen die äusseren Glieder (termini extremi),

b. das zweyte und dritte die mittleren Glieder (termini medii),

c. die beyden Vorder- oder die beyden Hinterglieder homologe, gleichnamige Glieder (termini homologi).

d. die Proportion selbst dißcret oder stättig, je nachdem die beyden mittlern Glieder ungleich oder gleich sind.

§. 201.

Erklärungen:

a. Eine Menge von Zahlen, die in stättigen arithmetischen Verhältnissen fortgehen, wo also zwischen einem Gliede und seinem darauf folgenden immer einerley Unterschied ist, heißt eine **arithmetische Reihe** oder **Progression**, z. B.

2, 4, 6, 8, 10, 12, 14 u. s. w., wo d immer $= 2$ ist.

b) Sind die Verhältnisse dieser Zahlen geometrisch, so heißt diese Menge eine geometrische Reihe oder Progression, wo also alle Verhältnisse den nemlichen Exponenten m haben. z. B.

2, 4, 8, 16, 32, 64 u. s. f.

wo m = 2 der gemeinschaftliche Exponent ist (§. 110.).

Zusatz: In jeder arithmetischen oder geometrischen Reihe sind alle Glieder, außer dem letzten, Vorderglieder, und eben so alle Glieder, mit Ausnahme des ersten, Hinterglieder.

II. Abschnitt.

Von arithmetischen Proportionen und Progressionen der Zahlen.

§. 202.

Lehrsatz:

Jede arithmetische Proportion läßt sich durch nachstehende Formel ausdrücken:

$$a - a + d = b - b + d$$

Beweis:

Offenbar kann man die beyden Vorderglieder in jeder arithmetischen Proportion durch a, b, und den Exponenten, oder Unterschied, der in beyden Verhältnissen gleich ist (§. 199.) mit d bezeichnen; so wer-

den

den die beyden Hinterglieder a + d, und b + d (§. 196), folglich der allgemeine Ausdruck für jede arithmetische Proportion:

a — a + d = b — b + d.

I. Zusatz: Das Formular für jede stättige arithmetische Proportion ist: a — a + d = a + 2 d; denn, wenn man in der allgemeinen Formel b = a + d substituirt (§. 200. d.), so bekömt man für die stättige: a — a + d = a + d — a + 2 d. oder wenn man der Kürze wegen eines der mittlern Glieder weglässt, a — a + d — a + 2 d.

II. Zusatz: In der dißcreten arithmetischen Proportion ist die Summe der äußern Glieder jener der mittlern gleich; denn offenbar, wenn a — a + d = b — b + d; so ist a + b + d = a + b + d.

Z. B. wenn 7 — 3 = 9 — 5; so ist 7 + 5 = 3 + 9 = 12.

III. Zusatz: In der stättigen arithmetischen Proportion ist die Summe der äußern Glieder dem doppelten mittlern Gliede gleich; denn wenn a — a + d — a + 2 d, so ist 2 a + 2 d = 2 (a + d)

z. B. wenn 9 — 7 — 5; so ist 9 + 5 = 2 × 7 = 14.

IV. Zusatz: Wenn die Summe zweyer Zahlen der Summe von zweyen andern gleich ist, so stehen diese vier Zahlen allemal in arithmetischer Proportion, wenn man die beyden Zahlen der einen Summe zu äußere, und die der andern zu mittlere Glieder nimmt; das ist: wenn a + f = b + c; so ist a — b = c — f; oder auch f — b = c — a.

Denn

Denn wenn $a + f = b + c$, so ist

$a - b = c - f$, und $f - b = c - a$ (§. 149. I. Zus.), z. B. wenn $7 + 3 = 6 + 4$; so ist $7 - 6 = 4 - 3$; $3 - 6 = 4 - 7$.

V. Zusatz. Wenn die Summe zweyer Zahlen dem Duplo einer andern gleich ist, so ist letztere die mittlere arithmetische Proportionalzahl zwischen den beyden ersten; d. i., wenn $a + c = 2b$; so ist $a - b - c$; oder auch $c - b - a$; denn wenn $a + c = 2b = b + b$ so ist $a - b = b - c$; und $c - b = b - a$ (IV. Zus.)

z. B. da $8 + 4 = 2 \times 6$; so ist $8 - 6 = 4$; $4 - 6 - 8$.

§. 203.

Aufgabe:

Zu drey gegebenen Zahlen die vierte arithmetische Proportionalzahl finden.

Auflösung:

1. Da nicht nur die drey Zahlen, sondern auch die Ordnung, nach welcher sie als Glieder in der Proportion stehen sollen, gegeben seyn muß, so schreibe man an die Stelle des fehlenden Gliedes x,
2. setze die Summe der äußern Glieder jener der mittlern gleich (§. 202. II. Zus.);
3. aus dieser Gleichung bestimme man x (§. 151.) als die gesuchte Zahl.

I. Beyspiel.

Zu den Zahlen 7, 5, 10 die vierte arithmetische Proportionalzahl suchen, wenn die Zahlen obige Ordnung beybehalten, mithin die gesuchte Zahl das vierte Glied in der Proportion werden soll.

Auflösung:

$7 - 5 = 10 - x$; $7 + x = 15$; $x = 15 - 7 = 8$.

II. Beyspiel.

Sollen hingegen die gegebenen Zahlen in nachstehender Ordnung 7, 10, 5 so aufeinander folgen, daß die gesuchte Zahl das dritte Glied der Proportion werden soll, so ist

$7 - 10 = x - 5$; $10 + x = 12$; $x = 2$.

§. 204.

Aufgabe:

Zu zwey gegebenen Zahlen die dritte arithmetische Proportionalzahl finden.

Auflösung:

1. Da nebst den beyden Zahlen auch die Stellen, welche ihnen in der Proportion zukommen, gegeben seyn müssen, so schreibe man an den Platz des fehlenden Gliedes x,

2. Bilde aus der Summe der äußern Glieder und dem doppelten mittlern eine Gleichung (§. 202. III. Zus.)

3. Aus letzterer bestimme man x (§. 151.) als die gesuchte Proportionalzahl.

I. Beyspiel.

Zu den Zahlen 5, 7 die dritte Proportionalzahl finden, wenn die Zahlen in der gegebenen Ordnung auf einander folgen, also die gesuchte Zahl das dritte Glied werden soll.

Auflösung:

$$5 - 7 - x ; 5 + x = 14 ; x = 9.$$

II. Beyspiel.

Wenn die gesuchte Zahl das mittlere Glied werden soll.

Auflösung:

$$5 - x - 7 ; 2x = 12 ; x = 6.$$

Zusatz: Die mittlere arithmetische Proportionalzahl zweyer Zahlen ist ihrer halben Summe gleich.

§. 205.

Lehrsatz:

Jede arithmetische Reihe ist unter nachstehender Formel enthalten:

$$a , a + d , a + 2d , a + 3d , a + 4d \ldots .$$

Beweis:

1. Wenn a das erste Glied, und d die allen Verhältnissen gemeinschaftliche Differenz (§. 201. a.) bezeichnen, so drückt $a - a + d$ jedesmal das erste Verhältniß der gegebenen Reihe aus (§. 196).

2. Da nun das zweyte Glied $a + d$ zugleich ein Vorderglied ist (§. 201. Zus.), so findet man sein Hinterglied, oder das dritte Glied der Reihe, wenn man dem 2ten d addirt, mithin $= a + 2d$.

3. Aus diesem dritten Gliede findet man aus den nemlichen Gründen das vierte, wenn man solchem d addirt, also $= a + 3d$; und so bekömt man jedesmal aus einem gegebenen Gliede sein folgendes durch Addition des Unterschiedes d; folglich enthält die aufgestellte Formel den allgemeinen Ausdruck einer jeden arithmetischen Reihe.

I. Zusatz: Jedes Glied einer arithmetischen Reihe besteht aus der Summe des ersten Gliedes, und der so vielfachen Differenz, als Glieder vorangehen, folglich ist das nte, oder allgemeine Glied $= a + (n - 1)\,d$ (§. 110.).

II. Zusatz: Bezeichnet n die Anzahl der Glieder, und u das letzte Glied, so giebt der eben angeführte Ausdruck des allgemeinen Gliedes das letzte; d. i. $u = a + (n - 1)\,d$.

III. Zusatz: Der vollständige Ausdruck jeder arithmetischen Reihe für jede Anzahl n der Glieder ist:

$a,\ a + d,\ a + 2d,\ a + 3d,\ \ldots.\ a + (n-2)d,\ a + (n-1)d.$

§. 206.

Lehrsatz:

In jeder arithmetischen Reihe ist die Summe jeder zwey vom ersten und letzten gleichweit abstehender

Glie-

Glieder der Summe des ersten und letzten Gliedes gleich.

Beweis:

1. Für die Anzahl n der Glieder ist die Summe des ersten und letzten Gliedes, oder

$$a + u = 2a + (n + 1)d \quad (\S. 205. \text{ III. Zus.})$$

2. Das zweyte Glied $a + d$ ist vom ersten a um d unterschieden; hingegen ist auch das vorletzte $a + (n - 2)d$ vom letzten um das nemliche d verschieden; das zweyte Glied wächst um d, und das vorletzte nimmt um d ab, mithin ist ihre Summe $= 2a + (n - 1)d = a + u$.

3. So wie nun vorwätts jedes folgende Glied immer um d wächst, so nimmt rückwärts jedes Glied um d ab, nur muß man nicht vergessen, daß d positiv oder negativ seyn kann (§. 196. Nr. 2.); mithin allzeit die Summe jedes solchen Paares der Glieder $= 2a + (n - 1)d = a + u$.

z. B. in der Reihe: 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16 ist immer $2 + 16 = 4 + 14 = 6 + 12 = 8 + 10 = 18$.

§. 207

Lehrsatz:

Bey ungerader Anzahl der Glieder einer arithmetischen Reihe ist das mittlere Glied m der halben Summe vom ersten und letzten Gliede gleich, d. i.

$$m = \frac{a + u}{2}$$

Be:

Beweis:

1. Bezeichnet n wie bisher die Anzahl der Glieder, mithin im gegenwärtigen Falle eine ungerade Zahl, so ist das mittlere Glied weggerechnet $n - 1$ eine gerade Zahl.

2. Von diesen $n - 1$ Gliedern gehen nun offenbar die Hälfte, oder $\frac{n-1}{2}$ Glieder dem mittlern voran, folglich ist

3. $m = a + \frac{n-1}{2} d$ (§. 205. I. Zus.) $= \frac{2a + (n-1)d}{2}$
$= \frac{a + u}{2}$ (§. 206. Nr. 1.).

§. 208.

Lehrsatz:

In jeder arithmetischen Reihe ist die Summe aller Glieder dem Producte aus der Summe des ersten und letzten Gliedes in die halbe Anzahl der Glieder gleich,

d. i. $s = (a + u) \frac{n}{2}$

Beweis: I. Fall, wenn die Anzahl der Glieder oder n eine gerade Zahl ist.

1. Nach §. 206. ist jedes Paar vom ersten und letzten gleichweit abstehender Glieder $= a + u$.

2. Man erhält aber offenbar die Summe der Reihe, oder aller Glieder, wenn man die Anzahl aller dieser Paare nimmt.

3. Nun giebt es $\frac{n}{2}$ solcher Paare, mithin ist die Summe der Reihe, oder $s = (a+u)\frac{n}{2}$

Beweis. II. Fall, wenn die Anzahl der Glieder, oder n eine ungerade Zahl ist.

1. Nimmt man das mittlere Glied weg, so ist die Anzahl der bleibenden Glieder $n-1$ gerad,

2. Von diesen ist wieder jedes Paar vom ersten und letzten gleichweit abstehender Glieder $= a+u$.

3. Die Summe aller dieser Paare, derer es $\frac{n-1}{2}$ gibt, enthält die Summe aller Glieder außer dem mittlern m, mithin ist: $s = (a+u)\frac{n-1}{2} + m = \frac{na+nu-a-u}{2} + m$.

4. Da aber $m = \frac{a+u}{2}$ (§. 207.); so wird

$$s = \frac{na+nu-a-u}{2} + \frac{a+u}{2} = \frac{na+nu}{2} = (a+u)\frac{n}{2}.$$

I. Zusatz: Vermittels der zwey Gleichungen: $u = a+(n-1)d$ (§. 205. II. Zus.) und $s = (a+u)\frac{n}{2}$ lassen sich von den 5 Stücken a, u, d, n, s, wenn derer drey bekannt sind, die übrigen zwey durch Rechnung finden. (§. 153. I. Zus. und §. 167.)

II. Zusatz: Da von den 5 Stücken einer arithmetischen Reihe allemal drey gegeben seyn müssen, so sind in dieser Rücksicht 10 verschiedene Fälle möglich (§. 145.), und weil von den übrigen zwey unbekann-

ten Größen jede die gesuchte seyn kann, so ist die Anzahl aller möglichen Aufgaben = 20

§. 209.

Einige Aufgaben zur Uebung.

I. Aufgabe:

Aus dem ersten Gliede, der Differenz und Anzahl der Glieder, das letzte Glied einer arithmetischen Reihe, d. i. aus a, d, n die Größe von u bestimmen.

Auflösung:

$u = a + (n - 1) d$ (§. 205. II. Zus.)

Beyspiel:

Wie groß ist die siebente ungerade Zahl?

Auflösung:

Aus der Natur der ungeraden Zahlen erhellet, daß sie eine arithmetische Reihe bilden, deren erstes Glied $a = 1$, der Unterschied $d = 2$, und im gegebenen Beyspiele ist die Anzahl der Glieder $n = 7$, mithin ist die gesuchte ungerade 7te Zahl als das letzte Glied $u = 1 + (7 - 1) \times 2 = 1 + 12 = 13$.

II. Aufgabe:

Aus dem gegebenen letzten Gliede, der Differenz und Anzahl der Glieder das erste Glied, d. i. aus u, d, n, die Größe von a finden.

Auflösung:

Da $u = a + (n - 1) d$ (§. 205. II. Zus.), so ist $a = u - (n - 1) d$.

Bey-

Beyspiel:

Wie groß ist das erste Glied einer abnehmenden arithmetischen Reihe, deren letztes Glied = 2, der Unterschied = 2, und die Anzahl der Glieder = 7 ist?

Auflösung:

Bey abnehmender Reihe ist d eine negative Größe (§. 196. Nr. 2.); mithin wird

$$a = 2 + (7 - 1)2 \text{ (§. 38.)} = 2 + 12 = 14.$$

III. Aufgabe:

Aus dem ersten Gliede, dem Unterschiede, und der Anzahl der Glieder die Summe, d. i. aus a, d, n die Größe von s bestimmen.

Auflösung:

Da das letzte Glied oder u nicht unter den gegebenen begriffen, aber durch $u = a + (n - 1)d$ aus den gegebenen Stücken bestimmet ist, so substituire man diesen Werth in der Gleichung für s, oder $s = (a + u)\frac{n}{2}$ (§. 208.), und man erhält dafür

$$s = (a + a + (n - 1)d)\frac{n}{2} = (2a + nd - d)\frac{n}{2} = na + \tfrac{1}{2}n^2d - \tfrac{1}{2}nd.$$

wo s durch lauter gegebene Dinge bestimmet ist.

1. Beyspiel.

Wie groß ist die Summe von n ungeraden Zahlen?

Auflösung:

In diesem Beyspiele ist gemäß der Natur ungerader Zahlen $a = 1$, $d = 2$; hingegen bleibt n noch unbestimmt,

stimmt, und man suchet eine allgemeine Formel für die Summe einer beliebigen Anzahl ungerader Zahlen; mithin wird

$s = n + n^2 - n = n^2$; das ist:

Man erhält diese Summe allemal, wenn man die Zahl n, welche die Anzahl der Glieder angiebt, zum Quadrat erhebt; so ist die Summe der ersten 8 ungeraden Zahlen $= 8^2 = 64$.

Zusatz: Man findet daher umgekehrt das Quadrat einer jeden ganzen Zahl, wenn man der Ordnung nach so viele ungerade Zahlen zusammen addirt, als die gegebene Zahl Einheiten enthält.

2. Beyspiel:

Ein Stein fällt von einem Thurme während 5 Secunden auf den Boden, wie hoch ist der Thurm?

Auflösung:

Aus der Erfahrung weiß man, daß ein Körper im freyen Falle in der ersten Secunde beynahe 15 Pariser Fuß, in der zweyten 45 Fuß u. s. f. zurücklege, mithin seine während einer bestimmten Anzahl Secunden durchlaufenen Räume eine arithmetische Reihe bilden, wo $a = 15$ Fuß; $d = 30$ F., und n die Anzahl der Secunden, während welchen er fällt, und welche hier also $= 5$ ist; man sucht nun s.

$$s = 75 + \tfrac{1}{2} \times 25 \times 30 - \tfrac{1}{2} \times 5 \times 30$$
$$= 75 + 25 \times 15 - 5 \cdot 15$$
$$= 75 + 375 - 75 = 375 \text{ Pariser Fuß.}$$

IV. Aufgabe:

Aus dem ersten Gliede, dem Unterschiede, und der Summe die Anzahl der Glieder einer arithmetischen Reihe, d. i. aus a, d, s die Zahl n bestimmen.

Auflösung:

Man nehme die Formel aus der vorhergehenden Aufgabe, wo s durch a, d, n bestimmet ist, d. i.:

$$a\,n + \tfrac{1}{2}\,n^2 d - \tfrac{1}{2}\,n\,d = s$$

Aus dieser Gleichung läßt sich nach §. 159 die gesuchte Zahl n bestimmen, d. i.

$$2\,a\,n + n^2 d - n\,d = 2\,s$$

$$d\,n^2 + (2\,a - d)\,n = 2\,s$$

$$n^2 + \frac{2a - d}{d}\,n = \frac{2\,s}{d}$$

$$n^2 + \frac{2a-d}{d}\,n + \frac{4a^2-4ad+d^2}{4\,d^2} = \frac{2\,s}{d} + \frac{4a^2-4ad+d^2}{4\,d^2}$$

$$= \frac{2\,s}{d} + \frac{a^2}{d^2} - \frac{a}{d} + \frac{1}{4}$$

$$n + \frac{2\,a-d}{2d} - \frac{d}{d} = \pm\sqrt{\left(\frac{2\,s}{d} + \frac{a^2}{d^2} - \frac{a}{d} + \frac{1}{4}\right)}$$

$$n + \frac{a}{d} - \tfrac{1}{2} = \pm\sqrt{\left(\frac{2\,s}{d} + \frac{a^2}{d^2} - \frac{a}{d} + \tfrac{1}{4}\right)}$$

$$n = \tfrac{1}{2} - \frac{a}{d} \pm \sqrt{\left(\frac{2\,s}{d} + \frac{a^2}{d^2} - \frac{a}{d} + \frac{1}{4}\right)}$$

Beyspiel:

Ein Thurm ist 240 Pariser Fuß hoch, wie viele Secunden verfließen, bis ein Stein von selbem auf den Boden fällt?

Auf-

Auflösung:

Gegeben sind also wieder $a = 15$, $d = 30$, $s = 240$, und man sucht die Anzahl n der Glieder der Reihe, welche zugleich die Anzahl der Secunden bestimmet; nun ist $\frac{a}{d} = \frac{15}{30} = \frac{1}{2}$, mithin $\frac{a^2}{d^2} = \frac{1}{4}$, folglich:

$$n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{2 \times 240}{30} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right)}$$

$$n = \pm \sqrt{16} = 4 \text{ Secunden.}$$

III. Abschnitt.

Von geometrischen Proportionen der Zahlen.

§. 210.

Lehrsatz:

Jede geometrische Proportion ist unter nachstehender Formel enthalten:

$$a : ma = b : mb.$$

Beweis:

1. Offenbar können a, b die Vorderglieder, so wie m den gemeinschaftlichen Exponenten der beyden Verhältnisse darstellen (§. 197. V. Zus.).

2. Nun bekömt man jedes Hinterglied, wenn man das Vorderglied mit dem Exponenten des Verhältnisses multiplicirt (§. 197. IV. Zus.), daher sind die beyden Hinterglieder ma, mb; folglich

3. ist der allgemeine Ausdruck für jede geometrische Proportion: $a : ma = b : mb$.

I. Zu=

I. Zusatz: Jede geometrische stättige Proportion läßt sich durch $a : ma : m^2a$ ausdrücken; denn wenn man in der allgemeinen Formel $b = ma$ setzet, so bekömt man $a : ma = ma : m^2a$, und durch Weglassung eines der beyden mittlern Glieder $a : ma : m^2a$.

II. Zusatz: Ist in einer geometrischen Proportion das erste Glied dem zweyten gleich, so ist auch das dritte dem vierten gleich; denn wenn $a = ma$, so ist $m = 1$, mithin $b = mb$; ist hingegen das erste Glied größer als das zweyte, so ist auch das dritte größer als das vierte; denn wenn $a > ma$, so ist m ein ächter Bruch, mithin $m < 1$, und $b < mb$. Ist endlich das erste Glied kleiner als das zweyte, so muß auch das dritte kleiner als das vierte seyn; denn wenn $a < ma$, so ist $m > 1$; also auch $b > mb$.

III. Zusatz: Sind die Vorderglieder gleich, so sind es auch die Hinterglieder; denn offenbar wenn $a = b$, so ist auch $ma = mb$; und wenn das erste Glied größer als das dritte ist, so muß das zweyte größer als das vierte seyn; denn wenn $a > b$, so ist $ma > mb$ (§. 44. N. 5.), ist endlich das erste kleiner als das dritte Glied, so ist auch das zweyte kleiner als das vierte, d. i., wenn $a < b$, so ist $ma < mb$.

IV. Zusatz: In der geometrischen dißcreten Proportion ist das Product der äußern Glieder jenem der mittlern gleich; denn da jede dißcrete Proportion unter der Formel $a : ma = b : mb$, so ist offenbar $amb = mab$; z. B. wenn $2 : 4 = 6 : 12$, so ist $2 \times 12 = 4 \times 6 = 24$.

V. Zu-

V. Zusatz: In der geometrischen stättigen Proportion ist das Product der äußern Glieder der Quadratzahl des mittlern gleich; denn aus der Formel $a : ma : m^2a$ folgt $m^2a^2 = m^2a^2$. Z. B. wenn $2 : 4 : 8$, so ist $2 \times 8 = 4^2 = 16$.

VI. Zusatz: Wenn das Product zweyer Zahlen dem Producte zweyer anderer gleich ist, so erhält man eine geometrische Proportion, wenn man die Factoren des einen Productes zu äußern, die des andern zu mittlern Gliedern nimmt, d. i., wenn $ad = bc$, so ist

$a : b = c : d$; oder auch $c : a = d : b$;

denn wenn $a\,d = b\,c$, so ist $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$; und $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ (§. 149. IV. Zus.) mithin $a : b = c : d$, und $c : a = d : b$ (§. 197. IX. Zus.). Z. B. da $4 \times 9 = 2 \times 18$, so ist $4 : 2 = 18 : 9$; und $9 : 18 = 2 : 4$; oder auch $2 : 9 = 4 : 18$.

VII. Zusatz: Wenn das Product zweyer Zahlen eine Quadratzahl giebt, so ist die Wurzel der letztern die mittlere geometrische Proportionalzahl zu den beyden erstern, d. i., wenn $ac = b^2$, so ist $a : b : c$; denn $a\,c = b^2 = b \cdot b$, so folgt aus VI. Zus. offenbar $a : b = b : c$; oder $a : b : c$.

z. B. da $4 \times 9 = 36 = 6^2$, so ist $4 : 6 : 9$.

Anmerk. In der Folge werden unter Verhältnissen und Proportionen allemal geometrische verstanden, wenn nicht ausdrücklich das Gegentheil bemerket ist.

§. 211.

Aufgabe:
Zu drey Zahlen die vierte Proportionalzahl zu finden.

Auflösung:

1. Da nicht nur die drey Zahlen, sondern auch ihre Stellen, die sie in der Proportion einnehmen, gegeben seyn müssen, so schreibe man an den Platz des fehlenden Gliedes x.

2. Setze das Product der äußern Glieder jenem der mittlern gleich (§. 210. IV. Zus.), und bestimme

3. aus dieser Gleichung die unbekannte Größe x. (§. 151.)

I. Beyspiel:
Zu den Zahlen in folgender Ordnung 3, 6, 5 die 4te Proportinnalzahl finden, die also zugleich das vierte Glied seyn soll.

Auflösung:

$$2:6=5:x;\ 2x=6\times 5;\ x=\frac{5\times 6}{2}=15$$

Zusatz: Wenn die gesuchte Proportionalzahl das vierte Glied werden soll, so erhält man solche durch folgende Regel: Man nehme das Product der mitteren Glieder, und dividire solches durch das erste Glied.

II. Beyspiel:

Wenn die Zahlen 2, 5, 6 in dieser Ordnung so folgen, daß die gesuchte Proportionalzahl das dritte Glied werden muß.

Auf-

Auflösung:

$2 : 5 = x ; 6 ; 5x = 12 ; x = \frac{12}{5} = 2, 4.$

§. 212.

Aufgabe:

Zu zwey gegebenen Zahlen die dritte Proportionalzahl suchen.

Auflösung:

1. Man setze die Zahlen als Glieder einer stättigen Proportion so an, wie ihre Ordnung durch die Aufgabe bestimmet ist,

2. An die Stelle des fehlenden Gliedes schreibe man x,

3. Setze das Product der äußern Glieder dem Quadrate des mittlern Gliedes gleich (§. 210. V. Zus.), und bestimme

4. aus dieser Gleichung die gesuchte Proportionalzahl x. (§. 151. und §. 156.)

1. Beyspiel:

Zu den Zahlen 3, 6 in der nemlichen Ordnung die dritte Proportionalzahl suchen.

Auflösung:

$3 : 6 = x ; 3x = 36 ; x = \frac{36}{3} = 12.$

2. Beyspiel:

Zu den Zahlen 4, 16 die mittlere Proportionalzahl suchen.

Auf-

Auflösung:

$4 ; x ; 16 ; x^2 = 64 ; x = 8.$

§. 213.

Lehrsatz:

In jeder Proportion lassen sich

I. die mittlern und äußern Glieder verwechseln, d. i. wenn $a : b = c : d$, so ist (vicissim seu permutando) $a : c = b : d$, und $d : b = c : a$.

II. beyde Verhältnisse umkehren, d. i.

wenn $a : b = c : d$; so ist (invertendo) $b : a = d : c$.

Beweis: Wenn $a : b = c : d$; so ist $ad = bc$ und I. $a : c = b : d$, ferner $d : b = c : a$, II $b : a = d : c$ (§. 210. IV. u. VI. Zus.)

§. 214.

Lehrsatz:

In jeder Proportion verhält sich die Summe oder Differenz der Vorderglieder zur Summe oder Differenz der Hinterglieder, wie jedes Vorderglied zu seinem Hintergliede, d. i.

wenn $a : b = c : d$, so ist antecedentes et consequentes summando, vel differentiando

$a \pm c ; b \pm d = a : b = c : d.$

Beweis:

Wenn $a:b = c:d$; so ist

$ad = bc$ (§. 210= IV. Zus.)

$cd = cd$ mithin

$ad \pm cd = bc \pm cd$ (§. 30. Nr. 1.)

$(a \pm c)\,d = (b \pm d)\,c$ und

$a \pm c : b \pm d = c : d$ (§. 210. VI. Zus.)

$= a : b$ (§. 197. VI. Zus.)

I. Zusatz: In jeder Proportion verhält sich die Summe oder Differenz der beyden ersten Glieder zur Summe oder Differenz der beyden letzten Glieder, wie ein Paar homologe Glieder, d. i. wenn $a:b = c:d$, so ist componendo vel dividendo $a \pm b : c \pm d = b : d$,

und convertendo $= a : c$

Denn wenn $a:b = c:d$, so ist auch $a:c = b:d$ (§. 213.), woraus nach dem Lehrsatze beyde Proportionen folgen.

II. Zusatz: Wenn mehrere Verhältnisse einander gleich sind, so verhält sich die Summe aller Vorderglieder zur Summe aller Hinterglieder, wie jedes Vorderglied zu seinem Hintergliede, d. i.

wenn $a:b = c:d = e:f = g:h$ u. s. f., so ist

$(a + c + e + g) : (b + d + f + h) = a:b = c:d$

u. s. f. Denn nach dem Lehrsatze, wenn $a:b = c:d$ folgt $(a + c) : (b + d) = c:d = e:f$, und aus dieser Proportion wird ebenfalls $(a + c + e) : (b + d + f) = e:f = g:h$; aus letzter endlich folgt:

$(a + c + e + g) : (b + d + f + h) = g:h = a:b$

u. s. f.

§. 215.

Aufgabe:

Eine gegebene Zahl B in drey Theile x, y, z theilen, die sich gegen einander wie die gegebenen Zahlen a, b, c verhalten.

Auflösung:

1. Man addire die gegebenen Verhältnißzahlen a, b, c, und

2. setze nachstehende Proportionen an: Die Summe dieser Verhältnißzahlen verhält sich zur gegebenen Zahl B, wie jede der Verhältnißzahlen zu dem ihr entsprechenden Theile, d. i.

$$(a + b + c) : B = a : x = b : y = c : z$$

3. Aus diesen drey Proportionen bestimme man nach §. 211 die gesuchten Theile x, y, z.

Beweis:

1. Vermög der gesetzten Bedingung muß $x + y + z = B$ seyn (§. 19. N. 2.).

2. Soll $a : b = x : y$, und $b : c = y : z$ werden, mithin ist $a : x = b : y$; $b : y = c : z$ (§. 213. I.); folglich $(a + b + c) : (x + y + z) = a : x = b : y = c : z$ (§. 214. II. Zus.)

3. Statt $x + y + z$ die Zahl B Nro. 1. gesetzet, giebt $(a + b + c) : B = a : x = b : y = c : z$.

Beyspiel.

Man soll 324 in drey solche Theile theilen, daß sie sich gegeneinander wie die Zahlen 4, 6, 8 verhalten.

Auf-

Auflösung:

$4+6+8=18$, mithin

$18 : 324 = 4 : x$; und $x = 72$

$= 6 : y \quad y = 108$

$= 8 : z \quad z = 144$

$x+y+z = 324 = B.$

I. Zusatz: Auf ähnliche Art läßt sich eine jede gegebene Zahl in eine beliebige Anzahl Theile theilen, derer Verhältnißzahlen bestimmt sind.

II. Zusatz: Da in der Aufgabe für die 3 unbekannten Größen drey verschiedene Gleichungen gegeben sind nemlich $x+y+z=B$; ferner $a : b = x : y$ mithin $ay = bx$; endlich $b : c = y : z$, also $bz = cy$, so lassen sich diese Größen auch aus §. 154 bestimmen.

§. 216.

Lehrsatz:

Wenn man in einer Proportion ein oder beyde Verhältnisse, oder jedes Paar homologer Glieder mit der nemlichen Zahl multiplicirt, oder dividirt, so stehen die Producte und Quotienten noch in einer Proportion zueinander, d. i., wenn $a : b = c : d$, so ist

I. $ma : mb = nc : nd$

II. $\frac{a}{m} : \frac{b}{m} = \frac{c}{n} : \frac{d}{n}$

III. $ma : nb = mc : nd$

IV. $\frac{a}{m} : \frac{b}{n} = \frac{c}{m} : \frac{d}{n}$

Beweis:

1. Wenn m eine ganze Zahl ist, so folgen I. u. II. unmittelbar aus §. 198.

2. Ist m ein Bruch, so werden mit dessen Zähler die beyden Glieder des Verhältnisses multip'icirt, und mit dem Nenner dividirt, daher gilt I auch für einen Bruch.

3. Da man mit einem Bruche dividirt, wenn man solchen umkehrt, und multiplicirt, so gilt auch II, wenn m einen Bruch bezeichnet, welches ebenfalls erfolgt, im Falle auch n einen Bruch ausdrückt.

4. Wenn $a : b = c : d$, so ist auch $a : c = b : d$ (§. 213.), woraus auf eben die Art folgt, daß

$ma : mc = nb : nd$, und $\frac{a}{m} : \frac{c}{m} = \frac{b}{n} : \frac{d}{n}$

folglich auch III $ma : nb = mc : nd$;

$$\text{IV } \frac{a}{m} : \frac{b}{n} = \frac{c}{m} : \frac{d}{n}$$

5. Da sich Irrationalzahlen auf rationale durch Annäherung bringen lassen (§. 133.), so gelten diese Proportionen, m, n mögen National- oder Irrationalzahlen seyn.

§. 217.

Wenn 4 Zahlen proportionirt sind, so sind es auch ihre Potenzen und Wurzeln von einerley Grade, d. i. wenn $a : b = c : d$; so ist

I $a^m : b^m = c^m : d^m$

II $\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{c} : \sqrt[n]{d}$.

Beweis:

Wenn $a : b = c : d$; so ist

$ad = bc$; also

$(ad)^m = (bc)^m$; $\sqrt[n]{(ad)} = \sqrt[n]{(bc)}$ (§. 95 N. 1.)

$a^m . d^m = b^m . c^m$; $\sqrt[n]{a} . \sqrt[n]{d} = \sqrt[n]{b} . \sqrt[n]{c}$

(§. 96. u. Zuſ.)

$I\ a^m : b^m = c^m : d^m$; $II\ \sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{c} : \sqrt[n]{d}$

(§. 210. VI. Zuſ.).

§. 218.

Lehrſatz:

Wenn in zwey Proportionen zwey gemeinſchaftliche Glieder vorkommen, ſo ſtehen die übrigen ebenfalls in einer Proportion

I wenn die beyden gemeinſchaftlichen Glieder das erſte oder zweyte Verhältniß ausmachen, d. i.

wenn $a : b = c : d$

und $a : b = e : f$ ſo iſt ex aequo

ſimpliciter $c : d = e : f$

II wenn die gemeinschaftlichen Glieder homolog sind, d. i. wenn a : b = c : d

und e : a = f : c, so ist ordinatim

et ex aequo e : b = f : d.

III wenn die gemeinschaftlichen Glieder die äußern oder mittlern Glieder sind, d. i.

wenn a : b = c : d

und b : e = f : c, so ist pertur-

turbate et ex aequo a : e = f : d.

Beweis: von I.

Folget unmittelbar aus §. 197. VI. Zus.

Beweis von II.

Wenn a : b = c : d; so ist a : c = b : d
und e : a = f : c; e : f = a : c
folglich nach I. e : f = b : d, und e : b = f : d
(§. 213. I.)

Beweis von III.

Wenn a : b = c : d, so ist ad = bc
b : e = f : c; bc = ef
(§. 210. IV. Zus.)

mithin ad = ef; folglich a : e = f : d (§. 210. VI. Zus.)

§. 219.

Lehrsatz:

Wenn man die Glieder zweyer Proportionen der Ordnung nach miteinander multiplicirt oder dividirt, so sind die Producte und die Quotienten in eben der Ordnung einander proportionirt; d. i.

wenn a : b = c : d
und e : f = g : h
so ist I ae : bf = eg : dh
II $\frac{a}{e} : \frac{b}{f} = \frac{c}{g} : \frac{d}{h}$

Beweis:

Wenn a : b = c : d; so ist ad = bc
c : f = g : h; eh = fg } (§. 210. IV. Zus.)

folglich I ——— II

ad × eh = bc × fg; $\frac{ad}{eh} = \frac{bc}{fg}$ (§. 44. N. 1.)

oder ae × dh = bf × cg; $\frac{a}{e} \times \frac{d}{h} = \frac{b}{f} \times \frac{c}{g}$

und ae : bf = cg : dh; $\frac{a}{e} : \frac{b}{f} = \frac{c}{g} : \frac{d}{h}$ (§. 210. VI. Zus.)

I. **Zusatz:** Wenn man die Glieder von drey oder mehrern Proportionen der Ordnung nach miteinander multiplicirt, so sind die Producte in eben der Ordnung einander proportionirt, d. i.

wenn a : b = c : d
e : f = g : h
i : k = l : m

so ist aei : bfk = cgl : dhm.

II. **Zusatz:** Wenn a : b = m : n
und b : c = o : p

so ist ab : bc = mo : np, oder auch a : c = mo : np (§. 216.); man sagt daher, das Verhältniß

niß a : c sey aus den beyden Verhältnissen m : n und o : p zusammengesetzet.

III Zusatz: Wenn a : b = m : n
b : c = o : p
c : d = q : r
d : e = r : s

so ist a : e = m o q r : n p r s.

Man sagt, das Verhältniß a : e sey aus vier Verhältnissen zusammengesetzet. Ueberhaupt wenn mehrere Verhältnisse so beschaffen sind, daß immer das Hinterglied in einem Verhältnisse das Vorderglied im folgenden wird, so ist das Verhältniß des ersten zum letzten Gliede aus allen diesen Verhältnissen zusammengesetzet.

IV. Zusatz: Wenn in drey gleichen Verhältnissen das Hinterglied des ersten Verhältnisses das Vorderglied im zweyten, und das Hinterglied des zweyten Verhältnisses das Vorderglied im dritten Verhältnisse wird, d. i.

wenn a : b = a : b
b : c = a : b
c : d = a : b

so ist I a : c = a^2 : b^2; das erste Glied zum dritten, wie die Quadrate der beyden ersten; man heißt so ein aus zwey gleichen Verhältnissen zusammengesetztes ein **duplicirtes** (rationem duplicatam).

II. a : b = $\sqrt{a}$: $\sqrt{c}$, d. i., das erste Glied zum zweyten, wie die Quadratwurzeln des ersten und

dritten Gliedes, dieses Verhältniß a : b heißt in Ansehung des duplicirten a : c ein **subduplicirtes** (ratio subduplicata).

Da III $a : d = a^3 : b^3$; und IV $a : b = \sqrt[3]{a} : \sqrt[3]{d}$ so ist das Verhältniß a : d ein **triplicirtes** (triplicata) von a : b; hingegen letzteres ein **subtriplicirtes** Verhältniß vom erstern (ratio subtriplicata).

IV Abschnitt.

Von geometrischen Progreßionen.

§. 220.

Lehrsatz: Jede geometrische Reihe ist unter nachstehender Formel enthalten:

$a ; ma ; m^2a ; m^3a ; m^4a ; \ldots$

Beweis:

1. Offenbar kann a das erste Glied, und m den Exponenten jeder geometrischen Reihe, mithin a ; ma diesen zwey Glieder ausdrücken (§. 197. IV. Zus.).

2. Da ferner alle Verhältnisse den nemlichen Exponenten m haben, und jedes Glied in Rücksicht des folgenden ein Vorderglied ist (§. 201. b. u. Zus.), so giebt das Product des zweyten Gliedes ma in den Exponenten m das dritte Glied $= m^2a$.

3. Auf ähnliche Art findet man das 4te Glied $= m^3a$, und so alle folgende; folglich gilt die aufgestellte Formel für jede geometrische Reihe.

I. Zusatz: Jedes Glied einer geometrischen Reihe ist ein Product aus dem ersten Gliede a in eine Potenz von m, dessen Exponent so viele Einheiten enthält, als Glieder vorangehen, folglich ist das allgemeine (§. 110.) oder nte Glied der Reihe $= m^{n-1}a$.

II. Zusatz: Drückt n die Anzahl der Glieder einer geometrischen Reihe aus, so ist der allgemeine Ausdruck ein besonderer Ausdruck des letzten Gliedes, d. i. $u = m^{n-1}a$.

III. Zusatz: Der vollständige Ausdruck einer geometrischen Reihe ist:

$$a, ma, m^2a, m^3a, m^4a, \ldots, m^{n-2}a, m^{n-1}a$$

IV. Zusatz: Da $u = m^{n-1}a = \frac{m^n a}{m}$ (§. 104. III. Zus.), so ist $mu = m^n a$.

§. 221.

Lehrsatz

In jeder geometrischen Reihe ist die Summe aller Glieder, oder $s = \frac{mu-a}{m-1} = \frac{m^n a-a}{m-1} = \frac{a-m^n a}{1-m}$

Anmerkung. Dem Anfänger zur Uebung im algebraischen Calcul setze ich mehrere Beweisarten aus.

I. Beweis:

$s = a + ma + m^2a + m^3a + \ldots + m^{n-1}a$ (§. 220. III. Zuſ.)

und $ms = ma + m^2a + m^3a + \ldots + m^{n-1}a + m^n a$

folglich $ms - s = m^n a - a$

$(m-1)s = m^n a - a$

$$s = \frac{m^n a - a}{m-1} = \frac{mu - a}{m-1}$$ (§. 220. IV. Zuſ.)

II. Beweis:

1. In jeder geometriſchen Reihe ſind alle Glieder, auſſer dem letzten, Vorderglieder, mithin iſt die Summe der Vorderglieder $s - u$.

2. und da außer dem erſten jedes Glied ein Hinterglied iſt (§. 201. Zuſ.), ſo bezeichnet $s-a$ die Summe aller Hinterglieder.

3. Da ferner alle Verhältniſſe einander gleich ſind, ſo iſt nach §. 214. II. Zuſ.

$$s - u : s - a = a : ma = 1 : m$$

mithin $ms - mu = s - a$ (§. 210. IV. Zuſ.)

$ms - s = mu - a$

$(m-1)s = mu - a$

$$s = \frac{mu - a}{m-1}$$

III. **Beweis:**

1. Man dividire $m^n - 1$ durch $m - 1$ nach §. 109

$$\begin{array}{l|l} m^n - 1 & m^{n-1} + m^{n-2} + m^{n-3} + \ldots \\ (m-1) & \end{array}$$

$$\begin{array}{l} m^n - m^{n-1} \\ \hline + \quad - \\ \hline m^{n-1} - 1 \\ (m-1) \\ m^{n-1} - m^{n-2} \\ \hline + \quad - \\ \hline m^{n-2} - 1 \\ (m-1) \\ m^{n-2} - m^{n-3} \\ \hline + \quad - \\ \hline m^{n-3} - 1 \end{array}$$

2. Aus der bisher geführten Division erhellet, daß alle Glieder des Quotienten Potenzen von m sind, derer Exponent in jedem folgenden Gliede um 1 abnimmt, daß

3. der Rest jedesmal aus dem letzten Gliede des Quotienten weniger 1 bestehe;

4. Stellet man sich die Division immer fortgesetzet vor, bis der Subtrahend im Exponenten $= n - 3$, mithin das Glied des Quotienten selbst $= m^{n-(n-3)} = m^{n-n+3} = m^3$ wird, so ist

5. der

5. Der treffende Reſt wieder $m^3 - 1$.

6. Man ſetze nun die Diviſion wieder fort

$$
\begin{array}{l|l}
m^3-1 & \left\{ \ldots\ldots m^3+m^2+m+1 \right. \\
(m-1) & \\
m^3-m^2 & \\
- \quad + & \\
\hline
m^2-1 & \\
(m-1) & \\
m^2-m & \\
- \quad + & \\
\hline
m-1 & \\
(m-1) & \\
m-1 & \\
- \quad + & \\
\hline
0 &
\end{array}
$$

7. Folglich iſt:

$$\frac{m^n-1}{m-1} = m^{n-1}+m^{n-2}+\ldots+m^3+m^2+m+1$$

$$= 1+m+m^2+m^3+\ldots\ldots+m^{n-1}$$

$$\frac{m^n a-a}{m-1} = a+ma+m^2a+m^3a+\ldots\ldots+m^{n-1}a = s.$$

IV. Beweis:

Man dividire wieder 1 durch $1-m$ nach §. 109, ſo erhält man:

$$\frac{1}{1-m} = 1+m+m^2+m^3\ldots m^{n-1}+\frac{m^{n-1}}{1-m}$$

(§.

(§. 91. II. Zuſ.) mithin wird

$$\frac{1}{1-m} - \frac{m^n}{1-m} = \frac{1-m^n}{1-m} = 1+m+m^2+m^3+\ldots m^{n-1}$$

$$\frac{a-m^n a}{1-m} = a+ma+m^2a+m^3a+\ldots\ldots+m^{n-1}a = s.$$

I. Zuſatz: Für eine zunehmende Reihe, wo $u > a$ iſt, nimmt man zur Beſtimmung der Summe die Formel $s = \frac{mu-a}{m-1}$; für die abnehmende hingegen die andere Formel $s = \frac{a-mu}{1-m}$; die aber im Grunde einerley ſind; denn in letzterer wird:

$$s - ms = a - mu$$

$$ms - s = mu - a \text{ (§. 149. II. Zuſ.)}$$

$$\text{mithin } s = \frac{mu-a}{m-1} = \frac{a-mu}{1-m}$$

II. Zuſatz: Aus den beyden Gleichungen: $s = \frac{mu-a}{m-a}$

und aus $u = m^{n-1}a$ (§. 220. II. Zuſ.) laſſen ſich von den 5 Stücken a, u, m, n, s, wenn drey davon gegeben ſind, die übrigen zwey durch Rechnung finden (§. 153. u. §. 167.)

II. Zuſatz: So wie in der arithmetiſchen Reihe, ſo ſind auch in der geometriſchen für 3 gegebene Dinge 20 verſchiedene Aufgaben beſtimmet (§. 208. II. Zuſ.)

§. 222.

Einige Aufgaben zur Uebung;

I. Aufgabe;

Aus dem letzten Gliede, dem Exponenten der Reihe, und der Summe das erste Glied, d. i., aus u, m, s, die Zahl a bestimmen.

Auflösung;

Da $s = \frac{mu - a}{m - 1}$

so ist $ms - s = mu - a$,

und $a = mu + s - ms = s - m(s - u)$.

Beyspiel;

Das erste Glied einer geometrischen Reihe suchen, deren letztes Glied $= 64$, der Exponent $= 2$, und die Summe $= 127$ ist.

Auflösung;

$a = 127 - 2(127 - 64) = 127 - 2 \times 63$

$= 127 - 126 = 1$.

II. Aufgabe;

Aus dem ersten Gliede, dem Exponenten, der Summe das letzte Glied, d. i. aus a, m, s die Zahl u suchen.

Auflösung;

$\frac{mu - a}{m - 1} = s$; also $mu - a = (m - 1)s$,

und $mu = (m - 1)s + a$; $u = \frac{(m - 1)s + a}{m}$

Bey=

Beyspiel:

Man suchet das letzte Glied einer geometrischen Reihe, deren erstes Glied = 1, der Exponent = 3, und die Summe = 364 ist.

Auflösung:

$$u = \frac{(3-1)\times 364 + 1}{3} = 243.$$

III. Aufgabe:

Aus dem ersten Gliede, dem Exponenten, der Anzahl der Glieder, die Summe einer geometrischen Reihe, d. i. aus a, m, n, die Größe s bestimmen.

Auflösung:

Diese ist unmittelbar durch die Formel:

$s = \frac{m^n a - a}{m-1}$ des Lehrsatzes gegeben.

Beyspiel:

Dem Erfinder des Schachspieles wurde zur Belohnung seine Bitte bewilliget, ihm nemlich folgende Summe Waizen zu reichen, für das erste Feld 1 Körnchen, für das zweyte 2, für das dritte 4, für das vierte 8, und so für das folgende Feld immer doppelt so viel Waizenkörner, als für das vorhergehende; wie groß ist die Anzahl aller gefoderten Waizenkörner?

Auflösung:

In diesem Beyspiele ist $a = 1$, $m = 2$, $n = 64$, weil im Schachbrette 64 Felder sind, und man sucht s.

Folglich $s = \frac{2^{64} - 1}{2-1} = 2^{64} - 1$.

Nun

Nun ist aber $2^2 = 4$

$2^4 = 16$

$2^8 = 256$

$2^{16} = 65536$

$2^{32} = 4{,}294'967{,}296$

$2^{64} = 18'''446{,}744''073{,}709'551{,}616$

Mithin s = 18'''446,744''073,709'551,615 Körner.

I. Anmerkung. Nimmt man nun an, daß ungefähr 2760 Körner vom mittlern Waizen nach baierischem Gewichte 4 Lothe, der Münchner Metzen aber 49 Pfund $15\frac{1}{2}$ Loth, das Pfund zu 32 Loth gerechnet, wiegt, und das Münchner Schäffel 6 Metzen hält, so kommen auf das Schäffel vom mittlern Waizen 6'555,690 Körner, folglich beträgt die ganze bewilligte Summe 2''813,855'455,903 Münchner Schäffel. Würde man nun täglich eine Million, mithin jährlich 365 Millionen Schäffel entrichten, so würden doch mehr als 7709 Jahre zur völligen Abzahlung erfodert.

II. Anmerkung.

Die Aufgaben bey geometrischen Progressionen lassen sich fast allemal vermittels der Logarithmen viel leichter auflösen, und wenn die Anzahl der Glieder, d. i. n gesucht wird, so sind die Logarithmen zur Auflösung schlechterdings unentbehrlich, weil die bisherigen Vorschriften nicht zureichen, eine Gleichung aufzulösen, wo die unbekannte Größe als Exponent einer Dignität oder Wurzel vorkömt.

Zusatz: Wenn in einer geometrischen Progression von ächten Brüchen der Exponent der Verhältnisse m dem ersten Gliede a gleich, mithin m ein ächter Bruch, und folglich die Reihe abnehmend ist, so wird

$$s = \frac{a - mu}{1 - m} = \frac{a - au}{1 - a} = \frac{a}{1 - a} \times (1 - u).$$

Dieser letzte Werth kömt der Größe $\frac{a}{1-a}$ um so näher, je kleiner u wird, oder je weiter man so eine Reihe sich fortgesetzet denkt; stellet man sich daher die Reihe so verlängert, daß $u = 0$, d. i., die Reihe unendlich vor, so wird $s = \frac{a}{1-a}$.

§. 223.

Aufgabe:

Die Summe nachstehender unendlichen Reihe finden, wenn $\frac{y}{x}$ ein ächter Bruch ist.

$$\frac{y}{x} + \frac{y^2}{x^2} + \frac{y^3}{x^3} + \frac{y^4}{x^4} + \frac{y^5}{x^5} + \ldots\ldots$$

Auflösung:

Man nehme einen Bruch, dessen Zähler y, und der Nenner $= x - y$ ist, so enthält dieser Bruch die verlangte Summe, d. i. $s = \frac{y}{x-1}$

Beweis:

In dieser gegebenen Reihe von Brüchen ist $m = a = \frac{y}{x}$

ein ächter Bruch, ferner ist die Reihe unendlich, mithin §. 222. Zus.

$$s = \frac{y}{x} : (1 - \frac{y}{x}) = \frac{y}{x} : \frac{x-y}{x} = \frac{y}{x} \times \frac{x}{x-y} = \frac{y}{x-y}$$

I. Zusatz: Wenn man den Bruch $\frac{y}{x-y}$ durch Division nach §. 109 auflöset, so erhält man obige Reihe als Quotienten.

II. Zusatz: $\frac{s}{s-a}$

$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \ldots = \frac{1}{2-1} = 1$ (§. 109. V. Zus.)

III. Zusatz: $\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \ldots = \frac{1}{3-1} = \frac{1}{2}$.

IV. Zusatz: $\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \frac{1}{256} + \ldots = \frac{1}{4-1} = \frac{1}{3}$

V. Zusatz: $\frac{y^2}{x^2} + \frac{y^4}{x^4} + \frac{y^6}{x^6} + \ldots = \frac{y^2}{x^2-y^2}$

§. 224.

Aufgabe:

Wenn $\frac{y}{x}$ wieder einen ächten Bruch bezeichnet, die Summe von nachstehender unendlichen Reihe, wo die Zeichen wechseln, zu finden:

$$\frac{y}{x} - \frac{y^2}{x^2} + \frac{y^3}{x^3} - \frac{y^4}{x^4} + \frac{y^5}{x^5} - \frac{y^6}{x^6} + \ldots$$

Auf-

Auflösung.

Man nehme einen Bruch, dessen Zähler $= y$, und der Nenner $= x + y$ ist, so gibt dieser die verlangte Summe, d. i.

$$s = \frac{y}{x+y}$$

Beweis.

1. Man theile die Reihe in zwey andere A, und B, von welchen B die negativen, und A alle positiven Glieder enthält, so ist

2. $B = \frac{y^2}{x^2} + \frac{y^4}{x^4} + \frac{y^6}{x^6} + \ldots = \frac{y^2}{x^2-y^2}$ (§. 223. V. 3.)

3. $A = \frac{y}{x} + \frac{y^3}{x^3} + \frac{y^5}{x^5} + \frac{y^7}{x^7} + \ldots$

$$= \frac{y}{x}\left(1 + \frac{y^2}{x^2} + \frac{y^4}{x^4} + \frac{y^6}{x^6} + \ldots\right)$$

$$= \frac{y}{x}(1+B) = \frac{y}{x}\left(1 + \frac{y^2}{x^2-y^2}\right)$$

$$= \frac{y}{x} \times \frac{x^2-y^2+y^2}{x^2-y^2} = \frac{y}{x} \times \frac{x^2}{x^2-y^2} = \frac{xy}{x^2-y^2}$$

4. Nun ist $s = A - B$; folglich

$$s = \frac{xy}{x^2-y^2} - \frac{y^2}{x^2-y^2} = \frac{xy-y^2}{x^2-y^2} = \frac{y(x-y)}{(x+y)(x-y)}$$

(§. 103. Zus.)

Also $s = \frac{y}{x+y}$

1. Zu-

I. Zusatz: Wenn man $\frac{y}{x+y}$ aus §. 109 wieder auflöset, so erhält man die gegebene Reihe wieder.

II. Zusatz: $\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \ldots = \frac{1}{2+1} = \frac{1}{3}$
(§. 109. VI. Zus. und §. 223. IV. Zus.).

III. Zusatz: $\frac{1}{3} - \frac{1}{9} + \frac{1}{27} - \frac{1}{81} + \frac{1}{243} - \ldots = \frac{1}{3+1} = \frac{1}{4}$

§. 225.

Lehrsatz:

Jede geometrische Reihe, wenn man alle Glieder durch das erste Glied dividirt, läßt sich in eine andere verwandeln, deren erstes Glied $= 1$ ist, und wo zwischen den Gliedern das vorige Verhältniß Statt hat.

Beweis:

Man dividire die allgemeine Formel geometrischer Reihen (§. 220. III. Zus.) durch das erste Glied a, so ist der Quotient:

$$1, m, m^2, m^3, \ldots\ldots\ldots m^{n-1}.$$

In dieser Reihe ist wieder m der gemeinschaftliche Exponent, und das erste Glied $= 1$.

Z. B. die Reihe 4, 8, 16, 32, 64 verwandelt sich in 1, 2, 4, 8, 16, welche letztere den nemlichen Exponenten 2 mit ersterer Reihe hat.

1. Zusatz: In jeder geometrischen Reihe, deren erstes Glied $= 1$ ist, sind alle Glieder Potenzen vom zweyten

ten Gliede; denn wenn man im allgemeinen Formulare geometrischer Reihen (§. 220. III. Zus.) $a = 1$ setzet, so verwandelt sich solche in nachstehende:

$$1, m, m^2, m^3, m^4 \ldots\ldots m^{n-1}$$

wo das erste Glied $1 = m^0$ (§. 104. II. Zus.), mithin alle Glieder Potenzen vom zweyten Gliede sind.

II. Zusatz: Wenn N die allgemeine Formel geometrischer Reihen, derer erstes Glied $= 1$ ist; M eine solche Reihe bestimmter Zahlen; L hingegen eine arithmetische Reihe darstellet, die von 0 anfängt, und in den folgenden Gliedern die natürlichen Zahlen der Ordnung nach enthält, d. i.

M. 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, ...

N. $1, b, b^2, b^3, b^4, b^5, b^6, \ldots\ldots b^n$

L. 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, ... n

so giebt jede Zahl der Reihe L die Anzahl der Verhältnisse an, aus welchen das Verhältniß von 1 zu der ober ihr stehenden Zahl in der Reihe M, oder N zusammengesetzet ist, so giebt die Zahl 5 in der Reihe L an, daß das Verhältniß 1:32 aus 5 gleichen Verhältnissen, nemlich $1:2 = 2:4 = 4:8 = 8:16 = 16:32$ zusammengesetzet sey, und eben so das Verhältniß $1:b^5$ in der Reihe N (§. 219. III. Zus.); eben so bestimmet die Zahl 6 der Reihe L, daß 1:64, und eben so $1:b^6$ aus 6 gleichen Verhältnissen, jedes wie das erste 1:2, oder 1:b zusammengesetzet sey; überhaupt also bestimmen die Zahlen der Reihe L die Anzahl der Verhältnisse für die ober ihnen stehenden Zahlen der Reihe M und N.

III. Zusatz: Jedes Glied der Reihe L enthält den entsprechenden Exponenten, inwiefern die ober jedem Gliede stehende Zahl in der Reihe M und N Potenzen vom zweyten Gliede sind (I. Zus.); z. B. die Zahl 5 der Reihe L ist der Exponent vom 2ten Gliede der Reihe M, inwieferne die obenstehende Zahl $32 = 2^5$, also eine Potenz des zweyten Gliedes ist, für die Reihe N ists für sich einleuchtend.

IV. Zusatz: Nimmt man als Beyspiel für b eine andere als die Zahl 2, so kommen in der Reihe M ganz andere Zahlen als im II. Zusatze vor, so wenn man $b = 3$ setzet, so wird

M. 1, 3, 9, 27, 81, 243
L. 0, 1, 2, 3, 4, 5

Wo aber wieder die Zahlen der Reihe L sowohl die Anzahl der Verhältnisse angeben, als die entsprechenden Exponenten sind für die Zahlen der Reihe M wie im II. und III. Zusatze.

V. Zusatz: Da man anstatt b jede Zahl (Nur die Zahl 1 ausgenommen, weil jede Potenz von 1 wieder $= 1$ ist) substituiren kann, so lassen sich immer eine Menge von Zahlen, alle nemlich, die als Glieder in der Reihe vorkommen, als Potenzen einer beliebigen Zahl, die man als zweytes Glied für b in der geometrischen Reihe N. II. Zus. setzet, betrachten, zu welchen allemal die Reihe L die entsprechenden Exponenten angiebt.

VI. Haupt-

VI. Hauptstück.

Von den Logarithmen.

I Abschnitt.

Von Logarithmen überhaupt.

§. 226.

Erklärungen:

Wenn man jede Zahl m als eine Potenz von einer und eben derselben Zahl b, die nicht 1 ist, betrachtet,

a) so heißt der Exponent der Potenz der Logarithmus der Zahl m, d. i. wenn $m = b^x$, so ist x der Logarithmus von m;

b) den Logarithmus einer Zahl m bezeichnet man dadurch, daß man ihr log, oder auch nur l vorsetzet, d. i. wenn $m = b^x$; so ist $\log m = x$;

c) Die Zahl b heißt die **Grundzahl** oder **Basis**, und

d) die Logarithmen, die einer jeden Zahl bey dem ein für allemal bestimmten Werthe der Basis b zukommen, machen ein logarithmisches System aus.

I. Zusatz: Da die Zahlen der Reihe L (§. 225. II — V Zus.) die Exponenten zu den ober ihnen stehenden Zahlen der Reihen M, N enthalten, so sind sie die Logarithmen derselben; da sie zugleich die Anzahl der Verhältnisse angeben, so bekam jede Zahl der Reihe L den Namen ἀριθμος λογων (die Zahl der Verhältnisse).

II. Zusatz: Es kann unzählig viele logarithmische Systeme geben; denn die Basis b kann alle Werthe, 1 ausgenommen, erhalten (§. 225. V, Zus.).

III. Zusatz: In jedem Systeme ist log. 1 = 0; denn allemal ist $b^0 = 1$ (§. 104. II. Zus.).

IV. Zusatz: In jedem Systeme gehören zu gleichen Zahlen gleiche Logarithmen, d. i., wenn m = n, so ist lm = ln. Denn $m = b^x$; $n = b^y$, also $b^x = b^y$, mithin x = y, d. i. lm = ln.

§. 227.

Lehrsatz:

Der Logarithmus eines Productes ist der Summe der Logarithmen der Factoren gleich, das ist:

$$\log. m n = \log. m + \log. n$$

Beweis:

Für die Basis b ist (§. 226.)

$m = b^x$, mithin $\log m = x$

$n = b^y$; $\log. n = y$

$m n = b^{x+y}$ (§. 104.) folgl. $\log. mn = x + y$

$= \log m + \log. n.$

Zusatz: Aus den Logarithmen der Primzahlen erhält man durch Addition die Logarithmen der zusammengesetzten Zahlen z. B. $\log. 3 + \log 5 = \log. 15.$

§. 228.

Lehrsatz:

Man erhält den Logarithmus eines Quotienten, wenn man vom Logarithmus des Dividends den Logarithmus des Divisors abzieht, d. i.:

$$\log. \frac{m}{n} = \log. m - \log. n.$$

Beweis:

$m = b^x$; mithin $\log m = x$

$n = b^y$; $\log n = y$

$\frac{m}{n} = b^{x-y}$ (§. 104. I. Zus.) folgl. $\log \frac{m}{n} = x - y$

$= l. m - l. n.$

Zusatz: Man erhält den Logarithmus eines Bruches, wenn man vom Logarithmus des Zählers jenen des Nenners abzieht (§. 74.).

§. 229.

§. 229.

Lehrsatz:

Der Logarithmus von der Potenz einer Zahl ist ein Product aus dem Exponenten in den Logarithmus der Zahl, d. i.

$$\log. x^n = n \log. x$$

Beweis:

$x = b^r$; mithin $\log. x = r$

$x^n = b^{nr}$ (§. 105), folglich $\log. x^n = n\,r$

$= n. \log. x.$

§. 230.

Lehrsatz:

Der Logarithmus einer Wurzel ist dem Quotienten gleich, wenn man den Logarithmus der Zahl durch den Exponenten der Wurzel dividirt, d. i.

$$\log. \sqrt[n]{x} = \frac{\log. x}{n}$$

Beweis:

$x = b^r$; mithin $\log. x = r$

$\sqrt[n]{x} = b^{\frac{r}{n}}$ (§. 105. I. Zus.); folglich $\log. \sqrt[n]{x} = \frac{r}{n}$

$= \frac{\log. x}{n}$

§. 231.

Lehrsatz:

Wenn C die mittlere geometrische Proportionalzahl zwischen A, B ist, so ist der Logarithmus von C die mittlere arithmetische Proportionalzahl zwischen den Logarithmen von A und B.

Beweis:

Wenn $A : C : B$; so ist $C = \sqrt{AB}$ (§. 210. V. Zus.),

folglich $\log. C = \frac{\log. A + \log. B}{2}$ (§. 227. u. 230.),

also ist l. C. die mittlere arithmetische Proportionalzahl zwischen l A und l B (§. 204. Zus.)

II. Abschnitt.

Von briggischen Logarithmen.

§. 232.

Erklärungen:

a. Dasjenige logarithmische System, dessen Basis $b = 10$ gesetzet wird, oder wo $m = 10^x$ ist, heißt das **gemeine** oder **briggische System**,

b. die Logarithmen selbst von diesem Systeme heißen **gemeine** oder **briggische**, und

c. Da man jeden durch einen Decimalbruch, der gewöhnlich 7 Decimalstellen enthält, ausdrückt, so nennet man die im selben vorkommende ganze Zahl — die

— die Characteristik oder das Kennziffer, die Decimalziffern hingegen die Mantisse.

I. Zusatz: Wenn man §. 225. II. Zus. für b die Zahl 10 setzet, so verwandeln sich obige Reihen in nachstehende:

M. 1, 10, 100, 1000, 10000
N. 1, 10, 10^2, 10^3, 10^4
L. 0, 1, 2, 3, 4

Wo die letztere Reihe L die gemeinen oder briggischen Logarithmen für die Zahlen der Reihe M angiebt.

II. Zusatz: Von allen Zahlen, die nicht als Glieder der Reihe M vorkommen, sind die gemeinen Logarithmen Brüche, und zwar für die Zahlen zwischen 1 und 10 ächte, für die übrigen höheren Zahlen unächte Brüche.

III. Zusatz: Für jede ganze Zahl ist die Characteristik um 1 kleiner, als die Anzahl der Ziffern, woraus die gegebene Zahl besteht, d. i. für eine ganze Zahl von n Ziffern ist die Characteristik des Logarithmus = n — 1. z. B. für eine ganze Zahl aus 6 Ziffern ist das Kennziffer = 5.

IV. Zusatz: Im briggischen Systeme gehöret zur größern Zahl ein größerer Logarithmus, das ist, wenn $m > n$, so ist $lm > ln$; denn die Reihe M sowohl als L sind zunehmende Reihen.

V. Zusatz: Man erhält den Logarithmus eines ächten Bruches, wenn man vom Logarithmus des Nenners den Logarithmus des Zählers subtrahirt, und dem

Reste

Reste das Zeichen — giebt; d. i. $l\frac{3}{4} = -(l4 - l3) = -\log\frac{4}{3}$. Denn $l\frac{3}{4} = l3 - l4$ (§. 228. Zus.) $= -l4 + l3$

$= -(\log 4 - l3) = -l\frac{4}{3}$

VI. Zusatz: Zwey Brüche, wovon einer der umgekehrte vom andern ist, haben gleiche Logarithmen; aber mit verschiedenen Zeichen, d. i. $l\frac{m}{n} = -l\frac{n}{m}$.

VII. Zusatz: Ganze Zahlen und unächte Brüche haben positive, ächte Brüche aber negative Logarithmen: und umgekehrt zu positiven Logarithmen gehören ganze Zahlen, oder unächte Brüche; zu negativen Logarithmen hingegen ächte Brüche.

§. 233.

Aufgabe:

Den briggischen Logarithmus für die Zahl 5 bis auf 7 Decimalstellen zu finden.

Auflösung:

1. Von der Reihe M (§. 232. I. Zus.) nehme man die nächst kleinere Zahl $1 = A$; die nächste größere $10 = B$, wo die gegebene Zahl 5 dazwischen liegt, und suche die mittlere geometrische Proportionalzahl C; d. i. $C = \sqrt{AB} = \sqrt{10} = 3{,}162277$.

2. Aus der Reihe L nehme man die Logarithmen $0 = lA$ und $1 = lB$, und bestimme den Logarithmus von C, d. i. $lC = \frac{1}{2}(lA + l.B)$ (§. 231.) $= \frac{1}{2} = 0{,}5$ (§. 91.) mithin ist.

3.

3. l 3,162277 = 0,5 = 0,5000000 (§. 87. III. Zus.)

4. Man suche aufs Neue für C und B, zwischen welchen die gegebene Zahl 5 liegt, die mittlere geometrische Proportional D, und zwischen ihren Logarithmen die mittlere arithmetische Proportionalzahl oder l D.

5. Dieses Verfahren setze man so lange fort, bis man auf die mittlere geometrische Proportionalzahl Z = 5,000000, und ihren Logarithmen l Z = 0,6989700 kömt; nachstehende Tabelle enthält das ganze Verfahren, d. i. alle geometrische Proportionalzahlen und ihre entsprechende Logarithmen bis auf Z u. l Z.

6. Da nun die zuletzt erhaltene Zahl nicht um 0,0000001 von der gegebenen Zahl verschieden ist, so kann man 5 = Z; und l 5 = l Z, mithin l 5 = 0,6989700 setzen, welches der gesuchte Logarithmus für die gegebene Zahl 5 ist.

Tabelle

zur Berechnung des brigg. Logarithmus der Zahl 5.

A = 1,000000	lA = 0,0000000	
B = 10,000000	lB = 1,0000000	C = √AB
C = 3,162277	lC = 0,5000000	D = √BC
D = 5,623413	lD = 0,7500000	E = √CD
E = 4,216964	lE = 0,6250000	F = √DE
F = 4,869674	lF = 0,6875000	G = √DF
G = 5,232991	lG = 0,7187500	H = √FG
H = 5,048065	lH = 0,7031250	I = √FH
I = 4,958069	lI = 0,6953125	K = √HI
K = 5,002865	lK = 0,6992187	L = √IK
L = 4,980416	lL = 0,6972656	M = √KL
M = 4,991627	lM = 0,6982421	N = √KM
N = 4,997242	lN = 0,6987304	O = √KN
O = 5,000052	lO = 0,6989745	P = √NO
P = 4,998647	lP = 0,6988527	Q = √OP
Q = 4,999350	lQ = 0,6989135	R = √OQ
R = 4,999701	lR = 0,6989440	S = √OR
S = 4,999876	lS = 0,6989592	T = √OS
T = 4,999963	lT = 0,6989668	V = √OT
V = 5,000008	lV = 0,6989707	W = √TV
W = 4,999984	lW = 0,6989687	X = √VW
X = 4,999997	lX = 0,6989697	Y = √VX
Y = 5,000003	lY = 0,6989702	Z = √XY
Z = 5,000000	lZ = 0,6989700	

Zusatz: Durch die Logarithmen der Zahlen 10 und 5 ist der Logarithmus der Primzahl 2 gegeben; denn da $2 = \frac{10}{5}$, so ist $l\,2 = l\,10 - l\,5$ (§. 228.) d. i.

$l\,10 = 1{,}0000000$

$l\,5 = 0{,}6989700$

$l\,2 = 0{,}3010300$

§. 234.

Aufgabe:

Die Logarithmen für alle ganze Zahlen zu finden.

Auflösung:

1. Die Logarithmen für die Primzahlen bestimme man durch ein ähnliches Verfahren wie §. 233.

2. für die zusammengesetzten Zahlen berechne man solche nach §. 227 Zus.; z. B. $l\,20 = l\,10 + l\,2 =$ 1,3010300.

Zusatz: Im briggischen Systeme sind die Logarithmen aller Zahlen, die nicht als Glieder der Reihe M (§. 231. I. Zus.) vorkommen, durch Annäherung bestimmet.

Anmerkung:

Auf diesem mühsamen Wege wurden die gemeinen Logarithmen wirklich berechnet. **Joh. Neper Baron von Merchiston**, ein Schottländer, lieferte zuerst ein wirkliches Logarithmensystem, und gab solches zu Edinburg 1614 unter dem Titel heraus: Mirifici lo-

logarithmorum Canonis descriptio ejusque usus in utraque Trigonometria et omni Logistica mathematica explicatio. Auf Nepers Gutheißen berechnete Heinrich Brigg, Professor der Geometrie zu Oxford für die Basis 10 die Logarithmen der ganzen Zahlen von 1 bis 20000, und daher heißen die gemeinen auch die briggischen Logarithmen. Die Logarithmen für die Zahlen 20000 bis 90000 lieferte Adrian Vlacq, ein Holländer, für die Zahlen von 90000 bis 100000 hatte Brigg schon die Logarithmen ebenfalls gefunden.

Unter den neuern Ausgaben logarithmischer Tabellen sind die merkwürdigsten die Sherwinschen Tafeln Londen 1742, die neue Ausgabe derselben zu Avignon 1774, Joh. Karl Schulzens Sammlung Berlin 1778; Tables portatives de Logarithmes par François Callet, à Paris chez Firmin Didot 1795. Die Logarithmen Sammlungen von Vega, dessen logarithmisch-trigonometrisches Handbuch Leipzig in der Weidmannischen Buchhandlung 1800 vorzüglich dem Anfänger zu empfehlen ist.

III. Abschnitt.

Berechnung der Logarithmen durch Auflösung der Functionen in Reihen.

§. 235.

Lehrsatz:

$$\text{Log.}(1+x) = A\left(x - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{4}x^4 + \tfrac{1}{5}x^5 + \ldots\right)$$

Beweis:

1. Der Logarithmus von $(1+x)$ ist offenbar eine Function von x (§. 185), man setze daher wie §. 191.

2. $\log(1+x) = Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + \ldots$
wo x in allen Gliedern vorkommen muß, weil für $x=0$; auch $\log.(1+x) = \log 1 = 0$ ist (§. 226. III. Zus.).

3. Da nun x alle Werthe annehmen kann, so wird diese Reihe, wenn man anstatt x die Größe 2x substituirt:

$$\log.(1+2x) = A.2x + B.2^2x^2 + C.2^3x^3 + D.2^4x^4 + \ldots$$
$$= 2Ax + 4Bx^2 + 8Cx^3 + 16Dx^4 + \ldots$$

4. Nun ist $\log.(1+2x) - \log(1+x) = \log\left(\frac{1+2x}{1+x}\right)$
(§. 228.) $= \log\left(1+\frac{x}{1+x}\right) = (2-1)Ax + (4-1)Bx^2 + (8-1)Cx^3 + (16-1)Dx^4 + \ldots$ Nr. 2. 3. $= Ax + 3Bx^2 + 7Cx^3 + 15Dx^4 + \ldots$

5. Setzet man für x N. 1. den Bruch $\frac{x}{1+x}$, so bekömt man wie Nr. 2.

$$\log\left(1+\frac{x}{1+x}\right) = A\frac{x}{1+x} + B\frac{x^2}{(1+x)^2} + C\frac{x^3}{(1+x)^3} + D\frac{x^4}{(1+x)^4} + \ldots$$

6. Wenn man die Zähler durch ihre Nenner dividirt (§. 109.), so wird

$$A\frac{x}{1+x} = Ax - Ax^2 + Ax^3 - Ax^4 + \ldots$$

$$B\frac{x^2}{(1+x)^2} = B\frac{x^2}{1+2x+x^2} = Bx^2 - 2Bx^3 + 3Bx^4 - \ldots.$$

$$C\frac{x^3}{(1+x)^3} = C\frac{x^3}{1+3x+3x^2+x^3} = Cx^3 - 3Cx^4 + \ldots.$$

$$D\frac{x}{(1+x)^4} = D\frac{x^4}{1+4x+6x^2+4x^3+x^4} = Dx^4 + \ldots$$

Folglich

$$7.\ \log.\left(1+\frac{x}{1+x}\right) = Ax - A\Big\}x^2 + A\Big\}x^3 - A\Big\}x^4 + \ldots$$
$$+B\Big\} -2B\Big\} +3B\Big\} -\ldots$$
$$+C\Big\} -3C\Big\} +\ldots$$
$$+D\Big\} -\ldots$$

8. Man setze die Reihen Nro. 4 und 7 einander gleich, und reducire diese neue Gleichung auf o, so wird

$$\left.\begin{array}{l} 0 = A \\ -A \end{array}\right\}x \quad \left.\begin{array}{l} -A \\ +B \\ -3B \end{array}\right\}x^2 \quad \left.\begin{array}{l} +A \\ -2B \\ +C \\ -7C \end{array}\right\}x^3 \quad \left.\begin{array}{l} -A \\ +3B \\ -3C \\ +D \\ -15D \end{array}\right\}x^4 \ldots.$$

9. Nun suche man die Coefficienten aus §. 189 zu bestimmen. Denn $A - A = 0$, mithin $A = A$, wo also der erste Coefficient unbestimmt bleibt.

10. Eben so ist:

$-A + B - 3B = -A - 2B = 0$, und $-2B = A$; also $B = -\frac{1}{2}A$.

11. $A - 2B + C - 7C = A - 2B - 6C = 0$.

$-6C = -A + 2B = -A + A$ (Nr. 10.) $= -2A$; und $C = \frac{2}{6} A = \frac{1}{3} A$.

12. $-A + 3B - 3C - 14D = 0$; oder

$-A - \frac{3}{2}A - A - 14D = 0$

$-\frac{7}{2}A - 14D = 0 = -\frac{1}{2}A - 2D$; folglich

$D = -\frac{1}{4}A$.

13. Subſtituiret man dieſe Nr. 9 — 12 gefundenen Werthe der Coefficienten in der Reihe Nr. 2, ſo wird

$\log.(1+x) = Ax - \frac{1}{2}Ax^2 + \frac{1}{3}Ax^3 - \frac{1}{4}Ax^4 + \ldots$

$= A(x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \ldots.)$

I. Zuſatz: Setzet man für $1+x$ die Zahl $1-x$, das iſt, giebt man x einen negativen Werth (wo abe x zugleich ein ächter Bruch ſeyn muß, damit $1-x$ noch eine poſitive Zahl bleibt, weil negative Zahlen als ſolche keine Logarithmen haben), ſo wird

$\log(1-x) = -Ax - \frac{1}{2}Ax^2 - \frac{1}{3}Ax^3 - \frac{1}{4}Ax^4 - \ldots$

$= -A(x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 + \ldots.)$

II. Zuſatz: $\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \log(1+x) - \log(1-x)$

(§. 228.), mithin

$$\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 2Ax + \frac{2Ax^3}{3} + \frac{2Ax^5}{5} + \frac{2Ax^7}{7} + \ldots$$

$= 2A(x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{7}x^7 + \ldots.)$

III. Zuſatz: Da x ein ächter Bruch ſeyn muß (I. Zuſ.), ſo ſetze man $x = \frac{1}{q}$, wo alſo q eine ganze Zahl iſt,

ſo

so wird $\frac{1+x}{1-x} = (1+\frac{1}{q}):(1-\frac{1}{q}) = \frac{q+1}{q}:$

$\frac{q-1}{q} = \frac{q+1}{q-1}$, folglich:

$$\log\left(\frac{q+1}{q-1}\right) = 2A\left(\frac{1}{q}+\frac{1}{3q^3}+\frac{1}{5q^5}+\frac{1}{7q^7}+\ldots\right)$$

IV. Zusatz: $\log\left(\frac{q+1}{q-1}\right) = \log(q+1) - \log(q-1)$;

folglich:

$$\log(q+1) = \log(q-1) + 2A\left(\frac{1}{q}+\frac{1}{3q^3}+\frac{1}{5q^5}+\frac{1}{7q^7}+..\right)$$

V. Zusatz: Setzet man $\frac{1+x}{1-x} = \frac{p^2}{p^2-1}$ (II. Zus.); so ist $x = \frac{1}{2p^2-1}$, wo wieder p eine ganze positive Zahl bezeichnet, weil x ein ächter Bruch ist; und

$$\log\left(\frac{p^2}{p^2-1}\right) = 2A\left(\frac{1}{2p^2-1}+\frac{1}{3(2p^2-1)^3}+\frac{1}{5(2p^2-1)^5}+\ldots.\right)$$

VI. Zusatz: Da $\log\left(\frac{p^2}{p^2-1}\right) = \log p^2 - \log(p^2-1)$

$= 2\log p - \log((p+1).(p-1))$ (§. 229 und §. 103 Zus.)

$= 2\log p - \log(p+1) - \log(p-1)$; so erhält man

$$\log p = \tfrac{1}{2}[\log(p+1)+\log(p-1)] + A\left(\frac{1}{2p^2-1}+\frac{1}{3(2p^2-1)^2}+\frac{1}{5(2p^2-1)^5}\right.$$

§. 236.

Erklärungen:

a. Der Coefficient A, mit welchem alle Glieder der Reihen §. 235 multiplicirt sind, heißt der logarithmische Modul;

b. Da es am natürlichsten ist, den Modul $A = 1$ zu setzen, so heißen jene Logarithmen, derer Modul $= 1$ ist, die natürlichen oder auch hyperbolischen; alle übrigen hingegen nennet man künstliche, wie z. B. die briggischen Logarithmen.

c. Um die Logarithmen verschiedener Systeme zu unterscheiden, setzet man den natürlichen log. nat., oder auch log. hyp.; den gemeinen hingegen log. vulg., oder auch log. ohne Beysatz vor; keine andere Systeme sind dermal üblich. Indessen will ich überhaupt die künstlichen Logarithmen durch log. art. bezeichnen.

I. Zusatz: Aus §. 235 sind daher

a. $\log. nat. (1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \ldots$

b. $\log. nat. (1-x) = -(x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 \ldots)$ (§. 235. I. Zus.).

c. $\log. nat. \left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 2(x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{7}x^7 + \ldots)$ (II. Zus.).

d. $\log. nat. (q+1) = \log. nat. (q-1) + 2\left(\frac{1}{q} + \frac{1}{3q^3} + \frac{1}{5q^5} \ldots\ldots\right)$ (IV. Zus.)

c. log.nat. $p = \frac{1}{2}$ log.nat.$(p+1) + \frac{1}{2}$ log. nat $(p-1)$

$$+\frac{1}{2p^2-1}+\frac{1}{3(2p^2-1)^3}+\frac{1}{5(2p^2-1)^5}+$$

(VI. Zuſ.)

II. Zuſatz: Jeden künſtlichen Logarithmen erhält man, wenn man deſſen Modul mit dem natürlichen Logarithmus multiplicirt; denn

log. art. $(1+x) =$ A. log. nat. $(1+x)$ (I. Zuſ. a, und §. 235.).

III. Zuſatz: Zur Berechnung der natürlichen Logarithmen für alle ganze Zahlen ſind die Reihen d u. e im erſten Zuſatze die bequemſten, da ſie am meiſten convergiren, mithin durch wenige Glieder die Logarithmen ſchon auf mehrere Decimalen beſtimmet ſind.

§. 237.

Aufgabe:

Die natürlichen Logarithmen der Zahlen 2 und 3 zu finden.

I. Auflöſung: Vermittels der Reihe d (§. 236. I. Zuſ.)

1. Man ſetze in dieſer Reihe $q. = 2$, ſo wird

$$\text{log. nat. } 3 = \text{log. nat. } 1 + 2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3.2^3}+\frac{1}{5.2^5}\right.$$

$$+\frac{1}{7.2^7}+\frac{1}{9.2^9}+\frac{1}{11.2^{11}}+\frac{1}{13.2^{13}}+$$

$$\left.\frac{1}{15.2^{15}}+\frac{1}{17.2^{17}}\ldots\ldots\right)\frac{1}{112}=$$

$$= 0 + 1 + \frac{1}{12} + \frac{1}{80} + \frac{1}{448} + \frac{1}{2304} + \frac{1}{11264} +$$
$$+ \frac{1}{53248} + \frac{1}{245760} + \frac{1}{1114112} + \ldots.$$

2. Verwandelt man diese Brüche in Decimalbrüche, so giebt ihre Summe den natürlichen Logarithmus der Zahl 3; d. i.

1,	0 0 0 0 0 0 0
0,	0 8 3 3 3 3 3
0,	0 1 2 5 0 0 0
0,	0 0 2 2 3 2 1
0,	0 0 0 4 3 4 0
0,	0 0 0 0 8 8 8
0,	0 0 0 0 1 8 8
0,	0 0 0 0 0 4 1
0,	0 0 0 0 0 0 9

log.nat.3 = 1, 0 9 8 6 1 2 0, welcher Logarithmus bis auf 6 Decimalstellen richtig ist.

3. Nun setze man in der allgemeinen Formel (§. 236. I. Zus. d) $q = 3$, so wird

$$\text{log. nat. } 4 = \text{log. nat. } 2 + 2\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 3^3} + \frac{1}{5 \cdot 3^5} + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{7 \cdot 3^7} + \ldots.\right)$$

Nun ist log. nat. $4 = \text{log. nat. } 2^2 = 2$ log. nat. 2 (§. 229.) mithin:

$$2 \text{ log. nat. } 2 = \text{log. nat. } 2 + 2\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 3^3} + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{5 \cdot 3^5} + \frac{1}{7 \cdot 3^7} \ldots.\right)$$

folge

folglich

$$\text{log. nat. } 2 = 2\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3\cdot 3^3} + \frac{1}{5\cdot 3^5} + \frac{1}{7\cdot 3^7} + \frac{1}{9\cdot 3^9} + \frac{1}{11\cdot 3^{11}} + \ldots.\right)$$

$$= 2\left(\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{81} + \tfrac{1}{1215} + \tfrac{1}{15309} + \tfrac{1}{177147} + \tfrac{1}{1948617} + \ldots.\right)$$

4. Verwandelt man wieder alle Glieder in Decimalbrüche, so giebt ihre Summe mit 2 multiplicirt den natürlichen Logarithmus von 2; das ist:

0, 3 3 3 3 3 3 3
0, 0 1 2 3 4 5 7
0, 0 0 0 8 2 3 0
0, 0 0 0 0 6 5 3
0, 0 0 0 0 0 5 6
0, 0 0 0 0 0 0 5

0, 3 4 6 5 7 3 4
× 2

log. nat. 2 = 0, 6 9 3 1 4 6 8 bis auf 5 Decimalstellen genau; will man solche genauer finden, so muß man von der Reihe mehrere Glieder, und von jedem Gliede mehrere Decimalstellen aussetzen.

II. Auflösung durch die allgemeine Formel des §. 236. I. Zus. e.

1. Man setze in solcher $p = 2$, so ist

$$\text{log. nat. } 2 = \tfrac{1}{2}\text{ log. nat. } 3 + \tfrac{1}{2}\text{ log. nat. } 1 + \left(\frac{1}{2.2^2-1} + \frac{1}{2.(2^2-1)^3} + \ldots\right)$$

$$= \tfrac{1}{2}$$

$$= \tfrac{1}{2} \log.\,nat.\,3 + \left(\frac{1}{7} + \frac{1}{3\cdot 7^3} + \frac{1}{5\cdot 7^5} + \frac{1}{7\cdot 7^7} + \ldots\right)$$

2. Kürze halber sey nun

$$P = \frac{1}{7} + \frac{1}{3\cdot 7^3} + \frac{1}{5\cdot 7^5} + \frac{1}{7\cdot 7^7} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$

so ist

3. $\log.\,nat.\,2 = \tfrac{1}{2} \log.\,nat.\,3 + P.$

4. Nun bestimme man wieder die allgemeine Formel e dadurch, daß man $p = 3$ setzet, das ist

$$\log.\,nat.\,3 = \tfrac{1}{2} \log.\,nat.\,4 + \tfrac{1}{2} \log.\,nat.\,2 + \left(\frac{1}{2\cdot 3^2 - 1} + \frac{1}{3(2\cdot 3^2 - 1)^3} + \frac{1}{5(2\cdot 3^2 - 1)^5} + \ldots\right.$$

5. Es ist aber $\log.\,nat.\,4 = \log.\,nat.\,2^2 = 2 \log.\,nat.\,2$, mithin $\tfrac{1}{2} \log.\,nat.\,4 + \tfrac{1}{2} \log.\,nat.\,2 = \tfrac{3}{2} \log.\,nat.\,2$, folglich

6. $$\log.\,nat.\,3 = \tfrac{3}{2} \log.\,nat.\,2 + \left(\frac{1}{17} + \frac{1}{3\cdot 17^3} + \frac{1}{5\cdot 17^5} + \ldots\right.$$

7. Man setze wieder

$$Q = \frac{1}{17} + \frac{1}{3\cdot 17^3} = \frac{1}{5\cdot 17^5} + \ldots;$$ so wird

8. $\log.\,nat.\,3 = \tfrac{3}{2} \log.\,nat.\,2 + Q$

Man substituire nun diesen Werth in der Gleichung Nro. 3, so wird

9. $\log.\,nat.\,2 = \tfrac{1}{2}(\tfrac{3}{2} \log.\,nat,\,2 + Q) + P$
$= \tfrac{3}{4} \log.\,nat.\,2 + \tfrac{1}{2} Q + P$, und
$\tfrac{1}{4} \log.\,nat.\,2 = P + \tfrac{1}{2} Q$; folglich

10. log. nat. $2 = 4P + 2Q$.

11. Substituirt man diesen Werth vom log. nat. 2 in der Gleichung Nro. 8, so wird

$$\text{log. nat. } 3 = \tfrac{3}{2}(4P + 2Q) + Q$$
$$= 3(2P + Q) + Q = 6P + 4Q$$

12. Nimmt man von der Reihe P Nro. 2. vier, und von Q Nro. 7 drey Glieder, verwandelt solche in Decimalbrüche, so ist

$\frac{1}{7} = 0{,}1428571$;
$\frac{1}{3 \cdot 7^3} = 0{,}0009718$;
$\frac{1}{5 \cdot 7^5} = 0{,}0000119$;
$\frac{1}{7 \cdot 7^7} = 0{,}0000002$;

$P = 0{,}1438410$

$\frac{1}{17} = 0{,}0588235$
$\frac{1}{3 \cdot 17^3} = 0{,}0000678$
$\frac{1}{5 \cdot 17^5} = 0{,}0000001$

$Q = 0{,}0588914$

13. Mithin

Nr. 10. log. nat. $2 = 4P + 2Q = 0{,}6931466$
Nr. 11. log. nat. $3 = 6P + 4Q = 1{,}0986116$

14. Genauer ist log. n. $2 = 0{,}6931472$
log. n $3 = 1{,}0986123$

§. 238.

Aufgabe:

Die natürlichen Logarithmen aller ganzen Zahlen zu finden.

Auflösung:

1. Man suche die natürlichen Logarithmen der Primzahlen nach einem ähnlichen Verfahren wie §. 237, und

2. bestimme durch die Addition dieser Logarithmen jene für die zusammengesetzten Zahlen (§. 227. Zus.). Die Berechnung wird immer leichter, je größer die Zahlen werden, für die man ihre Logarithmen suchet, weil die Reihen desto mehr convergiren, und man daher immer weniger Glieder brauchet.

I. **Zusatz:** Auf eben diese Weise erhält man:

log. nat. $5 = 1{,}6094379$

log. nat. $10 =$ log. nat. $5 +$ log. n. $2 = 2{,}3025850$

II. **Zusatz:** Die Grundzahl für das natürliche Logarithmensystem, oder b ist $= 2{,}7182818\ldots$ deren Entwicklung aber für gegenwärtiges Lehrbuch zu weitläufig ist.

§. 239.

Aufgabe:

Den Modul A für das briggische Logarithmensystem, dessen Grundzahl $b = 10$ ist (§. 232.) zu finden.

Auflösung:

1. log. vulg. $10 =$ A. log. nat. 10. (§. 236. II. Zus.)
$= A \times 2{,}3025850$ (§. 238. I. Zus.)

2. Nun ist log. vulg. $10 = 1$ (§. 232. I. Zus.) mithin ist

3.

$$X'' \frac{m-1}{1} xd^2x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} x^{m-3} d^2x^3 + \ldots\ldots$$

$$dX' \frac{m-1}{2} d^2x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} x^{m-3} d^2x^3 + \ldots\ldots$$

$$dX =$$

$$d^2X + m \frac{(m-2)}{3} x^{m-3} d^2x^3 + \ldots\ldots,$$

$$y + v$$

$$+ n($$

$$\frac{2)}{} x^{} \quad -1)(m-2)x^{m-3}(a+x)^n \quad \Big\} \quad + \ldots.$$

$$-2 \quad (m-1)x^{m-2} \quad (a+x)^{n-1} \quad \Big\} \quad \frac{u^2}{1.2.3} + \ldots.$$

$$-1 \quad (n-1)x^{m-1} \quad (a+x)^{n-2} \quad \Big\}$$

$$x^m \quad -1)(n-2)\,x^m \quad (a+x)^{n-3} \quad \Big\}$$

2. $A \times 2{,}3025850 = 1$, und

$$A = \frac{1}{2{,}3025850} = 0{,}4342945$$

§. 240.

Aufgabe:

Natürliche Logarithmen in gemeine zu verwandeln.

Auflösung:

Man multiplicire den natürlichen Logarithmus jeder Zahl mit 0,4342945.

Beweis log. vulg. m = log. nat. m × A (§. 236. II. Zus.)

z. B. log. vulg. 5 = 1,6094379 × 0,4342945 (§. 239 u. 238. I. Zus.)

= 0,6989700 (§. 233.)

§. 241.

Aufgabe:

Gemeine Logarithmen in natürliche zu verwandeln.

Auflösung:

Man multiplicire den gemeinen Logarithmus jeder Zahl mit 2,3025850

Beweis:

log. nat. m × A = log. vulg. m (§. 236. II. Zus.)

mithin log. nat. m = log. vulg. m : A

$$= \text{log. vulg. m} : \frac{1}{2{,}3025850} \quad \text{§. 239.}$$

= log. vulg. m × 2,3025850

z. B. log. nat. 2 = 0,3010300 × 2,3025850 (§. 233. 3.)

= 0,6931472 (§. 237. Nr. 14.)

VI. Abschnitt.

Vom Gebrauche der am Ende beygefügten kleinern logarithmischen Tabellen.

§. 242.

Aufgabe:

Aus den am Ende beygefügten kleinern Tabellen die Logarithmen aller ganzen Zahlen von 1 — 1000 anzugeben.

Auflösung:

Man schlage jede gegebene ganze Zahl in der Spalte N auf, so enthält der daneben stehende Decimalbruch in der Spalte L den entsprechenden Logarithmus; z. B. log. $324 = 2{,}5105450$.

Anmerkung. In der Folge sind unter den Logarithmen immer nur die gemeinen oder briggischen verstanden, wenn nicht ausdrücklich das Gegentheil angezeiget ist.

§. 243.

Aufgabe:

Für eine ganze Zahl von einer beliebigen Anzahl Ziffern, wovon aber nur die ersten drey, links gezählet, Zahlziffern, die übrigen lauter Nullen sind, den Logarithmus zu finden. z. B. für die Zahl 3860000.

Auflösung:

1. Man schlage den Logarithmus für die Zahl mit Hinweglassung der Nullen auf, und bestimme nach §. 242. ihren Logarithmus, d. i.

log. 386 = 2,5865873

2. Vermehre das Kennziffer des gefundenen Logarithmen um so viel Einheiten, als die gegebene Zahl Nullen nach den Zahlziffern enthält, so ist dieser dieser Logarithmus der gesuchte, d. i. log. 3860000 = 6,5865873.

Beweis:

3860000 = 386 × 10000, mithin (§. 227.)

log. 3860000 = log. 386 + log. 10000
= 2,5865873 + 4
= 6,5865873.

I. Zusatz: Wenn man drey unmittelbar aufeinander folgende, oder nicht weit von einander abstehende große Zahlen mit ihren Logarithmen vergleichet, so findet man, daß sich die Unterschiede der Zahlen, wie jene der Logarithmen verhalten, d. i. Wenn A, B, C, der Ordnung nach auf einander folgende Zahlen bezeichnen, so ist

C — A : B — A = log. C — log. A : log. B — log. A.

II. Zusatz: Setzet man in dieser Proportion:

log. B — log. A = d; so ist log. B = log. A + d.

III. Zusatz: Für B — A = D; wird B = A + D.

§. 244.

Aufgabe:

Für jede gegebene ganze Zahl, die aus mehr als 3 Ziffern besteht, aus den kleinern Tabellen den Logarithmus zu bestimmen, z. B. für 3685.

Auflösung:

1. Man bezeichne die gegebene Zahl durch B; so ist im Beyspiele $B = 3685$, und $l.B = l.3685$.

2. Sondere die ersten drey Ziffer, links gezählt, ab, ergänze die übrigen mit Nullen, und bezeichne diese Zahl mit A, d. i. $A = 3680$.

3. Bestimme den Logarithmus von A aus den Tabellen (§. 243.), so ist $lA = l\,3680 = 3{,}5658478$.

4. Vermehre das letzte Zahlziffer von A um 1, und bestimme wieder für diese Zahl C ihren Logarithmus aus den Tabellen, d. i.

$C = 3690 : lC = l.\ 3690 = 3{,}5670264$.

5. Nun suche man durch die Proportion (§. 243. I. Zus.) $d = \log.B - \log.A$, addire solche dem Logarithmus von A, so giebt die Summe den verlangten Logarithmus von B; denn $\log.B = \log.A + d$; d. i.

$C = 3690$	$B = 3685$	$lC = 3{,}5670264$
$A = 3680$	$A = 3680$	$lA = 3{,}5658478$
$C - A = 10$	$B - A = 5$	$lC - lA = 0{,}0011786$

$10 : 5 = 0{,}0011786 : lB - lA$

$2 : 1 = 0{,}0011786 : d$; mithin

$d =$

d = 0,0011786 : 2 = 0,0005893,

folglich: 1A = 3,5658478

d = 0,0005893

1B = 1A + d = 3,5664371 = log. 3685

Anmerkung. Da die Proportion (§. 243. I. Zus.) für kleinere Zahlen als 10000 nicht ganz genau richtig ist, so erhält man durch vorige Auflösung aus kleinern Tabellen immer den Logarithmus in den letztern Decimalstellen unrichtig.

§. 245.

Aufgabe:

Für einen gemeinen Bruch den Logarithmus zu finden.

Auflösung:

1. Ist der Bruch ein unächter, so ziehe man vom Logarithmus des Zählers jenen des Nenners ab (§. 228. Zus.).

2. Bey einem ächten Bruche ziehe man vom Logarithmus des Nenners jenen des Zählers ab, und setze dem Reste das Zeichen — vor (§. 232. V. Zus.);

z. B. $\log. \frac{3}{4} = -\log. \frac{4}{3}$; log. 4 = 0,6020600

log. 3 = 0,4771213

$\log. \frac{3}{4} = -0,1249387$

3. Um bey einem ächten Bruche den Logarithmus positiv zu erhalten, so addire man der Charakteristik vom Logarithmus des Zählers so viele Einheiten als nöthig sind, damit man den Logarithmus des Nenners

ab-

abziehen kann, setze diese addirte Einheiten aber am Ende der Differenz mit dem Zeichen — wieder bey, d. i. für den Logarithmus von $\frac{3}{4}$

log 3 = 0,4771213
+ 1 — 1
log. 4 = 0,6020600

log. $\frac{3}{4}$ = 0,7750613 — 1

Denn um was man durch Addition zur Kennziffer des Logarithmus vom Zähler den Logarithmus des Bruches vermehret hat, um eben so viel wird solcher durch Subtraction wieder vermindert, mithin dessen Werth nicht verändert.

§. 246.

Aufgabe:

Den Logarithmus eines Decimalbruches aus den Tabellen anzugeben; z. B. für den Bruch 0,436.

Auflösung:

1. Man bestimme den Logarithmus wie für eine ganze Zahl, d. i. l 436 = 2,6394865
2. Ziehe am Ende der Characteristik so viele Einheiten ab, als der gegebene Bruch Decimalstellen enthält, d. i. log. 0,436 = 2,6394865 — 3 = 0,6394865 — 1

Beweis:

$0{,}436 = \frac{436}{1000}$; mithin

log. 0,436 = log. 436 — log. 1000
= 2,6394865 — 3

Man

Man sieht leicht, daß dieser Beweis für jeden gegebenen Decimalbruch gelte.

§. 247.

Aufgabe:

Die einem gegebenen positiven Logarithmus entsprechende Zahlen aus den Tabellen anzugeben.

Auflösung:

1. Man schlage in der Spalte L die Mantisse des gegebenen Logarithmus auf, ohne auf das Kennziffer zu sehen,
2. ist solche vollkommen in den Tabellen anzutreffen, so nehme die daneben stehende Zahl in der Spalte N;
3. Enthält nun diese Zahl um ein Ziffer mehr als das Kennziffer des Logarithmus Einheiten hat, so ist sie die verlangte Zahl, enthält sie mehrere Ziffern, so schneidet man den Ueberschuß als Decimalstelle ab, bestünde sie aus wenigern Ziffern, so ergänzet man sie durch Nullen; so ist z. B. $2{,}6374897 = l\,434$; $0{,}6374897 = l\,4{,}34$; $4{,}6374897 = l\,43400$.
4. Wenn hingegen die Mantisse des gegebenen Logarithmus in den Tabellen nicht genau anzutreffen ist, wie z. B. von 3,6379898, so setze man den gegebenen Logarithmus $3{,}6379898 = l.\,B$, und die gesuchte Zahl $= B$;
5. Nehme aus den Tabellen die nächst größere Mantisse, setze solcher das Kennziffer des gegebenen Logarithmus

mus vor, bezeichne diesen Logarithmus durch l C, und bestimme die entsprechende Zahl C aus N. 2 u. 3., so ist im gegebenen Beyspiele:

l C = 3,6384893, und C = 4350.

6. Ferner setze man der nächst kleinern Mantisse der Tabelle das Kennziffer des gegebenen Logarithmen vor, bezeichne diesen neuern Logarithmus mit l A, und bestimme wieder aus Nro. 2 und 3 die Zahl A, so ist gegenwärtig: l A = 3,6374897; A = 4340.

7. Suche aus §. 243. I. und III. Zus. D = A — B, addire diese Differenz der Zahl A, so ist die Summe die entsprechende Zahl des gegebenen Logarithmus, denn B = A + D; d. i.

l C = 3,6384893	l B = 3,6379898	C = 4350
l A = 3,6374897	l A = 3,6374897	A = 4340
l C — l A = 0,0009996	l B — l A = 0,0005001	C — A = 10

folglich

0,0009996 : 0,0005001 = 10 : B — A, oder

9996 : 5001 = 10 : D; und

$D = \frac{5001 \cdot 10}{9996} = 5$

folglich B = A + D = 4340 + 5 = 4345.

§. 248.

Aufgabe.

Die einem gegebenen negativen Logarithmus entsprechende Zahl zu suchen; z. B. für — 0,9542425

Auf-

Auflösung:

1. Man suche nach §. 247. die dem gleichen positiven Logarithmen entsprechende Zahl; d. i.

$$0{,}9542425 = \log. 9.$$

2. Setze diese gefundene Zahl als Nenner unter 1 als Zähler, so ist dieser Bruch die gesuchte Zahl, d. i.

$$-0{,}9542425 = \log. \tfrac{1}{9}.$$

Beweis:

$$-0{,}9542425 = 0{,}0000000 - 0{,}9542425$$
$$= \log. 1 - \log. 9$$
$$= \log. \tfrac{1}{9} \text{ (§. 228. Zus.)}$$

§. 249.

Aufgabe:

Die dekadische Ergänzung (§. 41.) eines Logarithmus anzugeben, z. B. vom log. 6.

Auflösung:

Man schlage in den Tabellen den Logarithmus der gegebenen Zahl auf, und ziehe alle Ziffer dieses Logarithmes von 9, das niedrigste aber von 10 ab, so ist der gefundene Rest die verlangte decadische Ergänzung vom Logarithmus der gegebenen Zahl, d. i.

$$\log. 6 = 0{,}7781513$$
$$\text{compl. dec. log. } 6 = 9{,}2218487. \text{ (§. 41. Anm.)}$$

V. Abschnitt.

Anwendung der Logarithmen auf die Rechnungen mit Ziffern.

§. 250.

Aufgabe:

Einen gegebenen gemeinen Bruch in einen Decimalbruch zu verwandeln, z. B. $\frac{3}{4}$.

Auflösung.

1. Man addire dem Kennziffer vom Logarithmus des Zählers so viele Einheiten, bis man den Logarithmus des Nenners davon abziehen kann, und bemerke im Reste am Ende mit dem Zeichen — die addirten Einheiten; d. i.

$$l\,3 = 0{,}4771212\,;\; l\,4 = 0{,}6020600$$

$$\log 3 = 1{,}4771212 - 1$$

$$\log 4 = 0{,}6020600$$

$$\log \tfrac{3}{4} = 0{,}8750612 - 1 \quad (\S.\ 228.\ \text{Zus.})$$

2. Nun bestimme man für den positiven Theil des Restes die entsprechende Zahl, und setze das Comma von der Rechten zur Linken nach so vielen Ziffern, oder im Falle die gefundene Zahl selbst schon ein Decimalbruch ist, rücke man das Comma um so viele Ziffern vorwärts, als der negative Theil der Differenz Einheiten enthält, d. i., da $0{,}8750612 = \log 7{,}5$; so ist

$0{,}8750612 - 1 = \log. 0{,}75$, folglich
$\frac{3}{4} = 0{,}75$. (§. 91.).

Beweis.

Da $\log. \frac{3}{4} = 0{,}8750612 - 1$. Nro. 1.

$= \log. 7{,}5 - \log 10 = \log. \frac{7{,}5}{10}$ (§. 228.)

$= \log. 0{,}75$ (§. 87. II. Zus.); folglich

$\frac{3}{4} = 0{,}75$

Man sieht leicht ein, daß der Beweis für jeden gegebenen gemeinen Bruch passe.

§. 251.

Aufgabe:

Gegebene Zahlen zu multipliciren, z. B. 345×24.

Auflösung:

Man addire die Logarithmen der Factoren, die der Summe entsprechende Zahl ist das verlangte Product, d. i.

$l. 345 = 2{,}5378191$
$l. 24 = 1{,}3802112$

$l(345 \times 24) = 3{,}9180303$ (§. 227.)

Nun ist $3{,}9180303 = l\,8280$ aus den Tabellen, folglich $345 \times 24 = 8280$ (§. 226. IV. Zus.)

§. 252.

Aufgabe:

Gegebene Zahlen zu dividiren, z. B. 900 : 25.

Auflösung:

Man ziehe vom Logarithmus des Dividends den Logarithmus des Divisors ab, bestimme für den Rest aus den Tabellen die entsprechende Zahl, so ist solche der verlangte Quotient, d. i.

l. 900 = 2,9542425
l. 25 = 1,3979400

$$l\ \frac{900}{25} = 1{,}5563025 \text{ (§. 228.)}$$

Nun ist 1,5563025 = log. 36 aus den Tabellen;

mithin $\frac{900}{25} = 36$.

§. 253.

Aufgabe:

Zu drey Zahlen die vierte geometrische Proportionalzahl suchen, z. B. 24 : 36 = 48 : x

I. Auflösung:

Man addire die Logarithmen der beyden mittlern Glieder, und ziehe von ihrer Summe den Logarithmus des ersten Gliedes ab, so ist die dem Reste entspre-

chende

chende Zahl die gesuchte vierte geometrische Proportionalzahl; d. i. l. 36 = 1,5563025

l. 48 = 1,6812412

---

l (36.48) = 3,2375437

l 24 = 1,3802112

$l \frac{36 \times 48}{24} = 1{,}8573325$

Nun ist 1,8573325 = log. 72, mithin

$\frac{36 \times 48}{24} = 72$ (§. 211.) die verlangte 4te Proportionalzahl.

II. Auflösung:

Man addire die Logarithmen der beyden mittlern Glieder, und die dekadische Ergänzung vom ersten Gliede, vom Kennziffer der Summe ziehe man 10 ab, so ist die dem Reste entsprechende Zahl die vierte geometrische Proportionalzahl; d. i.

log. 36 = 1,5563025

log. 48 = 1,6812412

compl. dec. l. 24 = 8,6197888 — 10

11,8573325 — 10

folglich 1,8573325 = log. 72, und 72 ist die verlangte Proportionalzahl.

Beweis: Man bezeichne die Summe der beyden Logarithmen von 36 u. 48 mit A; den Logarithmus 48 mit N; so ist die Zahl 10 die höhere Einheit oder U, und 8,6197888 die dekadische Ergänzung C von N.

Nun

Nun ist nach der ersten Auflösung $1x = A - N$; ferner $A - N = A + C - U$ (§. 42.); folglich $1x = A + C - U$.

Anmerkung: Die dekadische Ergänzung gewährt eine Abkürzung im Calcul, wenn man von der Summe mehrerer Logarithmen einen oder mehrere Logarithmen abziehen soll, und in diesen Fällen werde ich in der Folge immer davon Gebrauch machen.

§. 254.

Aufgabe:

Eine Zahl zu einer verlangten Dignität erheben. z. B. $(24)^2$.

Auflösung:

Man multiplicire den Logarithmus der gegebenen Zahl mit dem Exponenten der verlangten Dignität, so ist die dem Producte entsprechende Zahl die verlangte Potenz für die gegebene Zahl; d. i.

$$1\,24 = 1{,}3802112$$
$$2 = 2$$

$$1\,(24)^2 = 2\,1\,24 = 2{,}7604224 \text{ (§. 229.)}$$

Nun ist aus den Tabellen: $2{,}7604224 = 1.\ 576$ folglich $(24)^2 = 576$.

§. 255.

Aufgabe:

Aus einer gegebenen Zahl eine verlangte Wurzel auszuziehen. z. B. $\sqrt[6]{(729)}$.

Auf-

Auflösung:

Man dividire den Logarithmus der gegeben Zahl mit dem Exponenten der verlangten Wurzel, die dem Quotienten zugehörige Zahl ist die gesuchte Wurzel, d. i. $l.729 = 2{,}8627275$

$6 = 6$

$\sqrt[6]{729} = \frac{l.729}{6} = 0{,}4771212$ (§. 230.).

Nun ist $0{,}4771212 = l\,3$; mithin $\sqrt[6]{729} = 3$

§. 256.

Aufgabe:

Eine Gleichung, wo die unbekannte Größe als Exponent der Potenz, oder der Wurzel vorkömt, aufzulösen.

Auflösung:

1. Man reducire die gegebene Gleichung so, daß die Größe, welche die unbekannte Größe als Exponenten der Dignität oder Wurzel bey sich hat, allein und positiv auf einer Seite steht;
2. Nun setze man die Logarithmen der Größen für beyde Seiten, so sind auch diese gleich (§. 226. IV. Zus.)
3. Da nun in dieser neuen Gleichung die unbekannte Größe nicht mehr als Exponent, sondern als Factor eines Productes, oder als Nenner eines Bruches enthalten ist, so läßt sich ihr Werth nach den gewöhnlichen

lichen Reductionsgesetzen (§. 149. IV. V. Zus.) finden, d. i., die gegebene Gleichung auflösen.

I. Beyspiel: Die Gleichung $2^x = 8192$ aufzulösen.

Auflösung:

$$x \, l\, 2 = \log. 8192 \text{ (§. 229)}$$

$$\text{also } x = \frac{\log. 8192}{\log. 2} = \frac{3,9133809}{0,3010300}$$

$$= 12,99 \ldots \text{ beynahe} = 13 \text{; d. i. } 2^{13} = 8192.$$

II. Beyspiel: In einer geometrischen Reihe aus dem gegebenen ersten und letzten Gliede nebst dem Exponenten der Verhältnisse, die Anzahl der Glieder, oder aus a, u, m die Zahl n finden (§. 221. II. Zus.)

Auflösung:

Es ist $m^{n-1} a = u$ (§. 220. II. Zus.).

$$\text{also } m^{n-1} = \frac{u}{a}$$

$$\text{mithin } (n-1)\, l\, m = l\, u - l\, a$$

$$\text{und } n - 1 = \frac{l\, u - l\, a}{l\, m}$$

$$\text{folglich } n = \frac{l\, u - l\, a}{l\, m} + 1 = \frac{l\, u - l\, a + l\, m}{l\, m}.$$

III. Beyspiel. Die Gleichung $\sqrt[x]{729} = 9$ aufzulösen.

Auflösung:

Es ist $\frac{l\, 729}{x} = l\, 9$ (§. 230.)

$$\text{also } x \,.\, l.9 = l\, 729$$

$$\text{und } x = \frac{l.\, 729}{l.\, 9} = \frac{2,8627275}{0,9542425} = 3$$

$$\text{folglich } \sqrt[3]{729} = 9.$$

VII. Hauptstück.

Practische Rechenkunst.

I. Abschnitt.

Anwendung der vier Rechnungsarten.

§. 257.

Erklärungen:

a. Eine gezählte Größe (§. 1. d) bestimmter Art, oder eine ganze Zahl als Inbegriff mehrerer Einheiten bestimmter Art (§. 21.) genommen, heißt eine ganze benannte Zahl, z. B. 3 Gulden, 5 ℔ u. s. f.

b. Eben so ist ein Bruch, dessen Ganzes als Größe bestimmter Art genommen wird, ein Bruch in benannten Zahlen, z. B. $\frac{3}{4}$ Thaler, $\frac{6}{7}$ Ellen u. s. w.

c. Jene Zahl, welche angibt, wie viel Einheiten einer bestimmten Art zusammen genommen eine Einheit der höhern Art ausmachen, heißt die Reductionszahl, so ist für Kr. und Fl. die Reductionszahl 60, weil 60 Kr. einen Fl. ausmachen.

Anmerkung. Die Reductionszahlen muß man sich, da sie an verschiedenen Orten und zu verschiedenen Zeiten, verschieden sind, aus der Landesverfassung

und

und aus vorhandenen Tabellen bekannt machen. Ich habe einige Tabellen, vorzüglich Baiern betreffend, am Ende als Beylagen angehängt, auf welche in der praktischen Rechenkunst immer Rücksicht genommen werden muß.

I. Zusatz: Eine benannte Zahl wird auf eine andere niederer Art reducirt, wenn man erstere mit der Reductionszahl multiplicirt. Z. B. 12 Fl. = 12 × 60 Kr.

Denn 1 Fl. = 60 Kr.

12 = 12

Folglich 12 Fl. = 12 × 60 Kr.

II. Zusatz: Eine benannte Zahl wird auf den Ausdruck einer Zahl höherer Art gebracht, wenn man sie durch die Reductionszahl dividirt. z. B.

24 Kr. = $\frac{24}{60}$ Fl. = $\frac{2}{5}$ Fl.

Denn 60 Kr. = 1 Fl.,

und 1 Kr. = $\frac{1}{60}$ Fl., mithin

24 Kr. = $\frac{24}{60}$ Fl. = $\frac{2}{5}$ Fl.

§. 258.

Aufgabe:

Benannte ganze Zahlen zu addiren.

Auflösung:

1. Man setze die gleichartigen Größen untereinander, und addire solche nach §. 31.
2. Bekömt man von einer Art so viele Einheiten, daß sie eine oder mehrere Einheiten der nächst höhern Art ausmachen, so zähle man sie letztern bey.

Bey-

Beyspiel:

5 Fl.	24 Kr.	3 Pf.	1 Hl.
6 Fl.	48 Kr.	2 Pf.	1 Hl.
Summe 12 Fl.	13 Kr.	2 Pf.	— Hl.

§. 259.

Aufgabe:

Ganze benannte Zahlen zu subtrahiren.

Auflösung:

1. Man schreibe die Zahlen des Subtrahends so unter jene des Minuends, daß gleichartige Größen unter einander zu stehen kommen, und ziehe sie nach der Vorschrift von §. 32. voneinander ab.

2. Ist an irgend einer Stelle der Minuend kleiner als der Subtrahend, so borge man im erstern eine Einheit von der nächst höhern Art, und addire sie an dieser Stelle, wo sie aber so viel gilt, als die Reductionszahl anzeiget.

Beyspiel:

24 Jahre.	2 Monathe.	6 Tage.	7 St.
14 J.	9 M.	27 T.	23 St.
Rest. 9 J.	4 M.	8 T.	8 St.

§. 260.

Aufgabe:

Benannte ganze Zahlen zu multipliciren.

Auf:

Auflösung:

1. Da der Multiplicator allemal eine bloße Zahl ist (§. 43.), so multiplicire man damit alle Zahlen des Multiplicands bey jenen der niedrigsten Art anfangen nach §. 53 u. 54.

2. Bekömt man in einem der Producte so viele Einheiten, daß sie zusammen eine oder mehrere Einheiten der nächst höhern Art ausmachen, so zähle man solche letztern bey.

Beyspiel:

5 Cent. 82 ℔. 15 Loth.
× 6

30 C. 492 ℔. 90 L.
= 34 C. 94 ℔. 26 L.

§. 261.

Aufgabe:

Eine Größe in benannten Zahlen durch eine ganze Zahl zu dividiren.

Auflösung:

1. Man setze den Divisor unter die Zahl des Dividends von der höchsten Art, und dividire wie §. 55. und 56.

2. Den bleibenden Rest reducire man aus §. 257. I. Zus. auf Einheiten der nächst niedern Art, addire sie solchen, und dividire die Summe mit der gegebenen Zahl.

3. Auf die nemliche Art verfahre man an allen folgenden Stellen.

Beyspiel:

24 Cent. 36 ℔. 3 Loth soll durch 5 getheilet werden.

Cent.		℔.		Loth.
24		436		35
(5)	4	(5)	87	(5) 7
20		40		35
4 = 400 ℔		36		—
		(5)		
		35		
		1 = 32 Loth.		

Folglich ist (24 C. + 36 ℔. + 3 L.) : 5 = 4 C. + 87 ℔. + 7 L.

§. 262.

Aufgabe:

Brüche in benannten Zahlen zu addiren, oder zu subtrahiren.

Auflösung:

1. Beziehen sich die Brüche auf Größen von einerley Art, so behandle man sie nach §. 82. und 83 wie Brüche von Zahlen überhaupt.

2. Sind sie nicht durch Größen von einerley Art ausgedrücket, so reducire man sie auf solche nach §. 257. I. u. II. Zus., und verfahre wie vorhin.

I. Beyspiel.

a. $\frac{3}{4}$ Fl. + $\frac{2}{5}$ Fl. = $\frac{15}{20}$ Fl. + $\frac{8}{20}$ Fl. = $\frac{23}{20}$ Fl.

b. $\frac{3}{4}$ Fl. − $\frac{2}{5}$ Fl. = $\frac{15}{20}$ Fl. − $\frac{8}{20}$ Fl. = $\frac{7}{20}$ Fl.

II. Beyspiel.

a. $\frac{3}{4}$ Cent. + $\frac{2}{3}$ ℔. = $\frac{300}{4}$ ℔. + $\frac{2}{3}$ ℔. = $\frac{900}{12}$ ℔.

b. $\frac{3}{4}$ Cent. − $\frac{2}{3}$ ℔. = $\frac{300}{4}$ ℔. − $\frac{2}{3}$ ℔. = $\frac{892}{12}$ ℔.

§. 263.

Aufgabe:

Einen gegebenen Bruch in benannten Zahlen mit einer ganzen Zahl, oder einem Bruche

I zu multipliciren, oder

II zu dividiren.

Auflösung:

Im ersten Falle verfahre man nach §. 84, im zweyten nach §. 85.

I. Beyspiel.

a. $\frac{3}{4}$ Fl. × $\frac{2}{5}$ = $\frac{6}{20}$ Fl.

b. $\frac{3}{4}$ Fl. × 2 = $\frac{6}{4}$ Fl. = $\frac{3}{2}$ Fl.

II. Beyspiel.

a. $\frac{3}{4}$ Fl. : $\frac{2}{5}$ = $\frac{15}{8}$ Fl.

b. $\frac{4}{5}$ Fl. : 2 = $\frac{2}{5}$ Fl. = $\frac{4}{10}$ Fl.

II. Abschnitt.

Anwendung der Proportionslehre.

§. 264.

Erklärungen:

a. Zwey Größen A, B stehen zu einander im geraden Verhältnisse, wenn mit der Zunahme der einen, die Zunahme der andern, und mit der Abnahme von A die Abnahme von B verknüpft ist.

b. Wird hingegen durch die Zunahme der ersten Größe A die Abnahme der zweyten Größe B, und durch die Abnahme von A die Zunahme von B bestimmet, so stehen die Größen A, B zueinander im umgekehrten Verhältnisse.

§. 265.

Lehrsatz:

Wenn m, n jede mögliche ganze Zahl ausdrücken, und wenn zwey Größen A, B so in einem geraden Verhältnisse stehen, daß den Theilen a, ma der einen Größe A, allemal der Ordnung nach die Theile b, mb der andern Größe B entsprechen, so giebt der Theil $\frac{n}{m}$ a von A, allemal den Theil $\frac{n}{m}$ b von B.

z. B.

Wenn

Wenn 100 Fl. Capital 5 Fl. Interesse, und $\frac{m}{n}$ 100 Fl. Cap. m 5 Fl. Interesse geben, so geben $\frac{n}{m}$ 100 Fl. Cap. auch $\frac{n}{m}$ 5 Fl. Inter.

Beweis:

1. Man setze $\frac{1}{m}$ a, gebe von B den Theil d, so giebt m. $\frac{1}{m}$ a den Theil m d (per Hyp.); das ist a giebt md.

2. Da nun a den Theil b giebt (per hyp.), so ist b $=$ md, und d $=$ $\frac{1}{m}$ b, und $\frac{1}{m}$ a giebt $\frac{1}{m}$ b Nr. 2., folglich

3. entspricht n $\frac{1}{m}$ a der Theil n $\frac{1}{m}$ b (per hyp.), d. i. $\frac{n}{m}$ a giebt $\frac{n}{m}$ b.

§. 266.

Lehrsatz:

Wenn wieder m, n jede noch so große ganze Zahl bezeichnen, und die Größen A, B im umgekehrten Verhältnisse so zu einander stehen, daß den Theilen a, ma der einen Größe A, von der andern B die Theile b, $\frac{1}{m}$ b der Ordnung nach entsprechen, so giebt der Theil $\frac{n}{m}$ a von A, den Theil $\frac{m}{n}$ b der Größe B.

Z. B. Wenn 100 Menschen einen Vorrath von Lebens-

bensmitteln in 8 Monathen, und m. 100 Menschen solchen in $\frac{1}{m}$ 8 Mon. aufzehren, so werden $\frac{n}{m}$ 100 Menschen selben in $\frac{m}{n}$ 8 Monathen verzehren.

Beweis:

1. Man setze: $\frac{1}{m}$ a gebe den Theil d, so giebt m. $\frac{1}{m}$ a den Theil $\frac{1}{m}$ d (per hyp.), d. i. a giebt $\frac{1}{m}$ d.

2. Da nun a der Theil b entspricht (per hyp.), so ist $b = \frac{1}{m} d$, und $mb = d$, folglich giebt $\frac{1}{m}$ a den Theil mb, und

3. n $\frac{1}{m}$ a giebt $\frac{1}{n}$ mb (per hyp.), das ist $\frac{n}{m}$ a von A entspricht von der Größe B der Theil $\frac{m}{n}$ b.

§. 267.

Lehrsatz:

Wenn m, n jede beliebige ganze Zahl bezeichnen, und die Größen A, B so im geraden Verhältnisse stehen, daß den Theilen a, ma der ersten Größe A, allemal der Ordnung nach die Theile b, mb der zweyten Größe B entsprechen, so sind jede zwey beliebige Theile a, α der ersten Größe A, den correspondirenden Theilen b, β der andern B proportionirt, d. i.

$$a : \alpha = b : \beta.$$

Beweis:

1. Das Verhältniß $a : \alpha$ läßt sich allemal auf ein Verhältniß ganzer Zahlen $m : n$ reduciren (§. 198. IV. Zuf.), mithin ist

2. $a : \alpha = m : n = 1 : \frac{n}{m}$ (§. 198.)

$$\alpha = \frac{n}{m} a.$$

3. Nun giebt a den Theil b, und m a den Theil mb (per hyp.); mithin entspricht $\frac{n}{m}$ a der Theil $\frac{n}{m}$ b (§. 265.), das ist

4. der Theil α giebt $\frac{n}{m}$ b, es giebt aber auch α den Theil β (per hyp.), mithin ist $\beta = \frac{n}{m}$ b.

5. Ferner ist $a : \frac{n}{m} a = b : \frac{n}{m} b$ (§. 210.), folglich aus Nro. 1 u. 4. $a : \alpha = b : \beta$.

§. 268.

Lehrsatz:

Wenn m, n jede beliebige ganze Zahl ausdrücken, nnd zwey Größen A, B im umgekehrten Verhältnisse so zu einander stehen, daß den Theilen a, ma von A, die Theile b, $\frac{1}{m}$ b von B der Ordnung nach entsprechen, so sind jede zwei beliebige Theile a, α von A den beiden correspondirenden Theilen b, β von B umkehrt proportionirt, d. i.

$$a : \alpha = \beta : b.$$

Beweis:

1. Es ist allemal $a : \alpha = m : n = 1 : \frac{n}{m}$ (§. 198. IV. Zus.) also $\alpha = \frac{n}{m} a$.

2. Da nun dem Theile a der Theil b, und dem Theile $\frac{1}{m}$a der Theil $\frac{1}{m}$b (per hyp.), also dem Theile $\frac{n}{m}$a der Theil $\frac{m}{n}$b entspricht (§. 266.), so giebt

3. der Theil α den Theil $\frac{m}{n}$b; der Theil α giebt aber auch β (per hyp.); also ist $\beta = \frac{m}{n}$b.

4. Ferner ist $a : \frac{n}{m} a = b : \frac{n}{m} b = \frac{m}{n} b : b$ (§. 197. VII. Zus. und §. 198.),

5. folglich aus Nr. 1. und 3. substituirt, wird

$$a : \alpha = \beta : b.$$

I. Zusatz: Die beyden letztern Lehrsätze enthalten die Angabe der Merkmale, ob die Theile einer Größe A den correspondirenden Theilen einer andern Größe B proportionirt sind, oder nicht, und im ersten Falle, ob sie solchen gerade oder umgekehrt proportionirt sind, das ist, wie man sich der Kürze wegen ausdrücket, ob und in welchem Verhältnisse die Grössen zu einander stehen.

II. Zusatz: Im geraden Verhältnisse stehen

a. die Menge Waaren und ihre Preise;

b. die Zinse mit der Größe des Capitals, und der Länge der Zeit, während welcher das Capital aufgelegt ist;

c. die Anzahl der Arbeiter mit ihrer Verrichtung, und dem Lohne dafür;

d. die Größe der Verrichtung mit der dazu erfoderlichen Zeit;

e. Verschiedene Gewichte, Längen- Getraid - Weinmaaße, verschiedene Geldsorten zueinander.

II. Zusatz: Im umgekehrten Verhältnisse stehen

a. Bey einerley Arbeit die Anzahl der Arbeiter, und die dazu erforderliche Zeit;

b. Die Länge und Breite des zu einem Kleide erfoderlichen Tuches;

c. Die Anzahl der Menschen mit der Zeit, in welcher sie einen gewissen Vorrath an Lebensmitteln aufzehren.

§. 269.

Aufgabe:

Zu drey gegebenen benannten Zahlen die vierte Proportionalzahl suchen.

Auflösung:

1. Man untersuche aus §. 267 und 268, in welchem Verhältnisse die zwey Größen stehen, und bestimme daraus die Ordnung der Glieder.

2. Nun reducire man die Glieder des gegebenen Verhältnisses aus §. 257. auf Zahlen einerley Art;

3. Behandle sie wie bloße Zahlen (§. 197. VII. Zus. und §. 199. II. Zus.);

4. Versetze die Glieder nach §. 213, oder verkleinere solche aus §. 216, je nachdem es die speciellen Umstände der Aufgabe erfodern.

5. Bestimme endlich aus §. 211 oder 212 die gesuchte vierte Proportionalzahl.

I. Beyspiel: Wie viel Fl. kosten 7 Loth Gewürz, wenn $\frac{1}{2}$ ℔ Gewürz 5 Fl. kostet?

Auflösung:

$\frac{1}{2}$ ℔ Gew.: 7 Loth Gew. = 5 Fl. : x Fl.

16 Lth. Gew.: 7 Loth Gew. = 5 Fl. : x

$16 : 7 = 5 : x$; $x = \frac{35}{16}$ Fl.

II. Beyspiel: Wie viele Tage brauchen 7 Arbeiter zu einem Graben, wenn 5 Arbeiter solchen in 18 Tagen vollenden?

Auflösung:

5 Arb. : 7 Arb. = x Tage : 18 Tag.

und $7 : 5 = 18 : x$, mithin

$$x = \frac{18.5}{7} = 12\ \tfrac{6}{7} \text{ Tage.}$$

Zusatz Wenn man Nr. 4 die Glieder so ordnet, daß die gesuchte Zahl an die vierte Stelle zu stehen kömt, so giebt der Zusatz §. 211. I. Beysp. die Regel an, nach welcher zu den drey gegebenen Zahlen die vierte Proportional-

tionalzahl gefunden werden kann; es heißt daher diese Regel die **Regel Detri** (regula de tribus terminis, regula aurea ihrer Brauchbarkeit wegen).

Anmerkung. Man unterscheidet die **ordentliche Regel Detri**, und die **verkehrte Regel Detri**, je nachdem die zwey Größen im geraden oder verkehrten Verhältnisse stehen; dieser Unterschied bezieht sich also nur auf die Ordnung der Glieder, nicht auf die Regel selbst.

§. 270.

Aufgaben zur Uebung und Erläuterung der am Ende beygefügten Tabellen.

I. **Aufgabe:**

Wie viel betragen 10 ℔ baierischen Handelsgewichtes nach dem neuesten französischen Gewichte Grammes?

Auflösung:

1. Da vermög der Tabelle baierisch. ℔ = 11628 Aß holl. Tr. Gew., und franz. Gramme = 20,8128 holl. Aß., so ist

baier. ℔ : franz. Gramme = 11682 : 20,8128, und

20,8128 b. ℔ = 11682 fr. Grammes.

2. Vermög §. 267 wird daher

20,8128 baier. ℔ : 10 baier. ℔ = 11682 Gram. : x Grammes.

folglich $x = \frac{10 \times 11682}{20,8128} = 5612,9$

3. Bequemer läßt sich x durch Logarithmen, die in der Tabelle ebenfalls angezeigt sind, finden;

nem=

nemlich log. 10×11682 = 5,0675172
log. 20,8128 = 1,3183310

log x = 3,7491862 = log. 5612,9

Folglich machen 10 baierische ℔ 5612,9 franz. Gramm.

Anmerkung. Auf ähnliche Art lassen sich vermittels der Tabelle die Gewichte verschiedener Oerter aufeinander reduciren.

II. **Aufgabe:**

Wie viel betragen 100 baierische Schuhe nach dem Wienerfußmaaße?

Auflösung:

1. Vermög der Tabelle ist 1 baier. Schuh = 129,38 Pariſ. Linien, und 1 Wienerfuß = 140,13 Pariſer Linien, alſo

Baier. Fuß : Wienerfuß = 129,38 : 140,13

und 140,13 baier. Fuß = 129,38 Wienerfuß,

folglich

2. 140,13 baier. Fuß : 100 b. F. = 129,38 W. F. : x Wienerfuß.

$$\text{mithin } x = \frac{129{,}38 \times 100}{140{,}13} = \frac{1293800}{14013}$$

3. Nun iſt log. 1293800 = 6,1118671
log. 14013 = 4,1465311

log. x = 1,9653360 = 92,329.

folglich ſind 100 baierische Fuß = 92,329 Wien. F.

Aus-

Anmerkung. Auf die nemliche Art lassen sich die Schuhe, und eben so die Ellen verschiedener Oerter aufeinander reduciren.

III. Aufgabe:

Wie viel betragen 50 baierische Chausséemeilen an Oestreicher Postmeilen?

I. Auflösung:

Da vermög der Meilentabelle

100 baierische Meilen = 99,818 geograph. Meilen

100 Oestreich. Meilen = 202,120 geogr. Meil.; so ist

baier. Meile : Oestr. Meile = 99,818 : 102,120, und

102,120 baier. Meilen = 99,818 östreich. Meil.

folglich:

102,120 b. Meil. : 50 b. M. = 99,818 östr. M. : x öst. M.

$$\text{Und } x = \frac{50 \times 99{,}818}{102{,}120}$$

Nun ist log. 50 = 1,6989700

log. 99,818 = 1,9992089

log. compl. dec. 102,120 = 7,9908892 — 10 (§. 249.)

log. x = 1,6890681 = log. 48,873

Mithin sind 50 baier. M. = 48,873 östr. Postmeilen.

II. Auflösung:

Vermög der nemlichen Tabelle ist

1 baier. Meile = 22826,6 Pariser Fuß

1 östr. Meile = 23354,5 Pariser Fuß, mithin

1 b. M. : 1 öst. M. = 22826,6 : 23354,5, und

23354,5 baier. M. = 22826,6 öst. M.; folglich

23354,5

23354,5 b. M. : 50 b. M. = 22826,6 östr. M. : x östr. M.

$$\text{Also } x = \frac{50 \times 22826{,}6}{23354{,}5}$$

Nun ist log. 50 = 1,6989700

log. 22826,6 = 4,3584412

log.compl.dec.23354,5 = 5,6316294 — 10

log. x = 1,6890406 = log. 48,87

folglich wie vorher 50 b. M. = 48,87 östr. Meilen.

III. Auflösung:

Nach der nemlichen Tabelle sind

15,028 baierische Meilen = 1 Meridiangrad

14,69 östreich. Meilen = 1 Meridiangrad, mithin

15,028 baier. Meilen = 14,69 östr. Meilen, also

15,028 b. M. : 50 baier. M. = 14,69 östr. M. : x östr. M.

$$\text{Mithin } x = \frac{50 \times 14{,}69}{15{,}028}$$

Nun ist log. 50 = 1,6989700

log. 14,69 = 1,1670218

log. compl. d. 15,028 = 8,8230988 — 10

log. x = 1,6890906 = log. 48,875

folglich wie in der vorigen Auflösung:

50 b. M. = 48,875 östr. M.

IV. Aufgabe:

Wie viel betragen 200 geogr. □ Meilen nach Klügel an bairischen □ Meilen?

Auflösung:

Vermög der letzten Spalte in der Meilen Tabelle sind

1003,7

1003,7 baier. □ Meilen = 1000 geogr. □ Meilen, mithin ist

1000 geogr. □M. : 200 ge. □M. = 1003,7 b. □M. : x b. □ M.

folglich $x = \frac{200 \times 1003{,}7}{1000} = \frac{1003{,}7}{5}$

Nun ist log. 1003,7 = 3,0016039

log. 5 = 0,6989700

log. x = 2,3026339 = log. 200,74

folglich sind 200 geogr. □ M. = 200,74 bair. □M.

V. Aufgabe:

Wie viel betragen 200 baierische □ Meilen an französischen neuen Lieues?

Auflösung:

Aus eben der Tabelle letzten Spalte ist

1003,7 b. □ Meilen = 1000 geogr. □ Meilen = 11334 □ lieus,

mithin

1003,7 b. □ M. : 200 b. □ M. = 11334 □ l. : x □ l.

folglich $x = \frac{200 \times 11334}{1003{,}7}$

Nun ist log. 200 = 2,3010300

log. 11334 = 4,0543832

log. c. dec. 1003,7 = 6,9983961 — 10

log. x = 3,3538093 = log. 2258,44

Folglich sind 200 baier. □ Meilen = 2258,44 Lieus

von $\frac{1}{25}$.

An-

Aufgabe: Das Integral von $x^n dx(a+bx^m)^p$

Auflösung: Man setze $1+n-m=f$; $1+n$

I. für $(n-r):m=1$;

$$\int x^n dx(a+bx^m)^p = \frac{x^f(a+bx^m)^{p+1}}{bg} - \frac{af}{bg}\int$$

7. Setzet man in der Formel (Nr. 3.) $k=n$

$$\int x^{n-m}\,dx\,(a+bx^m)^p = \frac{x^{1+n-2m}}{b,1+}$$

8. Substituirt man diesen Werth in der Gleid

$$9.\ \int x^n\,dx\,(a+bx^m)^p = \frac{x^{1+n-m}(a+bx^n}{b(1+n+n}$$

10. Wenn $II\ (n-r):m=2$; mithin $r=n$

$$\int x^n dx\,(a+bx^m)^p = \frac{x^f(a+bx^m)^{p+}}{bg}$$

11. Setzet man wieder in der Gleichung Nr. 3., III., aus welchen sich leicht die Fortsetzung f

Anmerkung: Die folgenden Tabellen sind, so wie ihr Gebrauch zum Theile für sich schon, zum Theil aus den bisherigen Aufgaben verständlich.

§. 271.

Erklärungen:

a. Der Inbegriff von Regeln, welche die Auflösung §. 215 angiebt, um eine Größe in mehrere proportionäle Theile zu theilen, heißt Gesellschaftsregel (regula societatis), in wie ferne durch selbe der gemeinschaftliche Gewinnst der Einlage gemäß vertheilet wird, die eine Gesellschaft mehrerer Personen zusammen getragen haben;

b. Dieser nemliche Inbegriff von Regeln hingegen heißt **Vermischungsregel**, in wie ferne durch solche die Größe der verschiedenen Bestandtheile bestimmet wird, woraus eine Sache nach einem festgesetzten Verhältnisse zusammengesetzet werden soll.

c. **Alligationsregel** wird jene Regel genannt, die angiebt, nach welchem Verhältnisse 2 oder mehrere Dinge gemischet werden sollen, damit ein mittlerer Werth herauskomme. §. 151. VII. Beyspiel allgemein aufgelöset stellet diese Regel für leichtere Fälle dar.

§. 272.

Aufgabe

Drey Kaufleute gewinnen in der Handlung 4000 Fl., der erste hat dazu 10000 Fl., der zweyte 7000 Fl.,

der

der dritte 3000 Fl. gegeben. Wie viel gebühret jedem seiner Einlage gemäß?

Auflösung:

Im gegebenen Falle ist §. 215. B = 4000; a = 10000 b = 7000; c = 3000, folglich

20000 : 4000 = 10000 : x
= 7000 : y
= 3000 : z; folglich

Der Antheil des ersten x = 2000 Fl.
des zweyten y = 1400 Fl.
des dritten z = 600 Fl.

x + y + z = 4000 Fl. = B.

§. 273.

Aufgabe:

Wenn bey einem guten Schießpulver zu 16 Loth Salpeter, 3 Loth Kohlen, und 2 Loth Schwefel gehören, wie viel von jeder Art gehören zu 100 ℔ Schießpulver?

Auflösung:

In dieser Aufgabe ist B = 100 ℔; a = 16 Loth; b = 3 L. c = 2 Loth; mithin

21 Loth : 100 ℔ = 16 Loth : x ℔
= 3 : y
= 2 : z

Folg=

Folglich der Antheil vom Salpeter $x = 76\frac{4}{21}$ ℔

von Kohlen $y = 14\frac{6}{21}$

vom Schwefel $z = 9\frac{11}{21}$.

$x + y + z = 100$ ℔ $= B$.

§. 274.

Erklärungen:

a. Wenn das Verhältniß zweyer Größen aus zwey Verhältnissen zusammengesetzet ist (§. 219. II. Zus.), so heißt die Regel, nach welcher aus 5 gegebenen Gliedern der zwey Proportionen eine von den beyden Größen bestimmet wird, die regula quinque, und

b. überhaupt heißt die Regel, nach welcher eine von den beyden Größen, die in einem zusammengesetzten Verhältnisse stehen, aus den übrigen gegebenen Gliedern gefunden wird, die **Kettenregel**, oder die zusammengesetzte **Regel de Tri** (regula composita).

§. 275.

Aufgabe:

Wenn 9000 Fl. in 3 Jahren 390 Fl. Interessen bringen; wie viel Fl. bringen zu gleichen Procenten 11000 Fl. in 5 Jahren.

Auflösung:

1. Man bezeichne das treffende Interesse von 11000 Fl. in 3 Jahren mit y; hingegen das gesuchte Interesse eben dieses Capitals in 5 Jahren mit x, so ist §. 267.

2. 9000 Fl. : 11000 Fl. = 390 Fl. Int. : y Fl. Int.
   3 Jahre : 5 Jahre = y Fl. Int. : x Fl. Int., oder

3. 9000 : 11000 = 390 : y
   3 : 5 = y : x; folglich §. 219. II. Zus.
   27000 : 55000 = 390 : x oder
   27 : 55 = 390 : x
   9 : 55 = 130 : x, folglich

$$x = \frac{55 \times 130}{9} = 794\,\tfrac{4}{9}\text{ Fl.}$$

1. Zusatz: Wenn E, ε, e verschiedene Wirkungen, C, c die Ursachen, T, t die Zeiten, in welchen die Ursachen wirken, bezeichnen, so daß C, T, E, ferner C, t, ε; und c, t, e allemal zusammen gehören, so ist aus §. 267.

   1. für einerley Ursache C; T : t = E : ε
   2. für gleiche Zeiten t; C : c = ε : e; mithin
   3. nach §. 219. II. Zus. CT : ct = E : e; folglich
      eCT = Ect.

Es versteht sich von selbst, daß dieses nur insoferne gilt, in wie ferne diese Größen als gezählte Größen, mithin als Zahlen genommen werden, welches bey der Anwendung dieses, so wie in der Folge eines jeden andern Formulars allemal zu verstehen ist.

Aufgabe: $\int x^n dx (a + bx^m)^p$ durch Hilfe von $\int x^r dx ($

Auflösung: Man setze $n + 1 = g$, so ist

I für $p - q = 1$; oder $q = p - 1$

$$\int x^n dx (a + bx^m)^p = \frac{x^g}{g} (a + bx^m)^p - \frac{bmp}{g} \int x^{n+$$

$$9. \int x^{n+m} dx (a + bx)^{p-1} = \frac{x^{1+n+m} (a + bx^m)^{p-1}}{1 + n + m}$$

10. Setzet man diesen Werth in die Gleichung Nr. 5.

$$11. \int x^n dx (a + bx^m)^p = \frac{x^{n+1}}{n+1} (a + bx^m)^p - \frac{bmpx^{1+}}{(n+1)(n-}$$

12. Substituirt man in letzter Gleichung $n + 1 = g$;

$$3. \int x^n dx (a + bx^m)^p = \frac{x^g}{g} (a + bx^m)^p - \frac{bmpx^{g+m}}{g(g+m)} (a +$$

Nimmt man aufs Neue in der Gleichung Nr. 3. $k =$ $p - 3$ die Formel III.; und durch ähnliches Ver

; Da nun $\frac{n-r}{m}$ eine ganze Zahl ist, folglich auch $\frac{n-}{}$ mal durch $\int x^r dx (a + bx^m)^q$ bestimmen (S. 346. 1

$$\frac{1}{(b-3)(1-3m)}\,y^{1-3m}\,u^{1-4m}\,dx\,(a+px^m)^q+C$$

II. Zusatz: Aus letzter Gleichung läßt sich, wenn von den 6 Dingen 5 gegeben sind, jedes unbekannte 6te Ding finden, sie dient also eine Menge Proportionen als Gleichungen aufzulösen, wenn nemlich die Glieder als Ursachen, Wirkungen u. s. w. einander bestimmen; noch ausgedehnter wird ihre Anwendung, wenn man sich unter E, e die bestimmten Größen, und unter C, c, T, t ihre Bestimmungsgründe, d. i. jene Größen denket, durch welche erstere bestimmet werden.

III. Zusatz: Verwandelt man eine gegebene Aufgabe nach dieser Formel in weiterer Bedeutung in eine Gleichung, setzet zwischen die gleichen Producte einen Verticalstrich, und suchet nach §. 151 den Werth der unbekannten Größe, so heißt diese Auflösungsmethode die Reesische Regel, von einem Holländer de Rees, also genannt.

1. Beyspiel:

Zwölf Arbeiter rücken mit einem Graben in 3 Tagen 60 Fuß fort, wie viele Tage brauchen 15 Arbeiter zu 520 Fuß?

Auflösung:

In diesem Beyspiel wird e = 60 F.; c = 12 Arb.; t = 3 Tage: Und E = 520 Fuß; C = 15 Arbeiter; T = x.

Mithin: $60 \times 15 \times x = 520 \times 12 \times 3$, und

$$x = \frac{520 \times 12 \times 3}{60 \times 15} = \frac{52 \times 2}{5} = \frac{104}{5} = 20\frac{4}{5} \text{ Täge.}$$

Oder nach der Reesischen Regel:

T. x	52 Ø Fuß. Graben.
Pers. 15.	3 T.
60 F.	12 Pers.
5	2

Mithin ebenfalls $5 x = 52 \times 2$; $x = \frac{104}{5}$

II. Beyspiel.

Wenn von einem Stück Tuche, das $\frac{7}{4}$ Ellen breit ist, 6 Ellen zu einem Kleide gehören, wie viel Ellen sind dazu nöthig, wenn das Stück Tuch nur $\frac{5}{4}$ breit ist?

Auflösung:

In diesem Beyspiele ist E = e = der zum Kleide erfoderlichen Menge Tuches, diese hängt nun von der Länge und Breite des Stückes ab, man kann also C. T $= \frac{7}{4} \times 6$, und ct $= \frac{5}{4} \times x$ setzen; mithin ist $\frac{5}{4} x = \frac{7}{4} . 6$; oder

$5 x = 42$; $x = \frac{42}{5} = 8\frac{2}{5}$ Ellen.

Nach der Reesischen Regel:

Ellen x	1 Kleid.
Breite $\frac{5}{4}$	6 Ellen
1 Kl.	$\frac{7}{4}$ breit.

Folglich wieder $5 x = 42$; und $x = \frac{42}{5}$.

III.

II. Abschnitt.

Anwendung der Progressionslehre.

§. 276.

Erklärungen:

Wenn an Jemand eine Summe Geldes zum Gebrauche auf eine Zeit überlassen wird, so fordert man gewöhnlich eine gewisse Summe dafür, es heißt nun

a. die gelehnte Summe Geld das **Capital**,

b. die für den einjährigen Gebrauch desselben geforderte Summe, das **Interesse**, oder der Zins, z. B. 5 von 100 Fl., und zwar

α. **einfacher Zins**, welcher nur vom Capital allein entrichtet wird, selbst wenn mehrere Zinstermine ausstehen, und die treffenden Zinse nicht entrichtet werden;

β. Zinszins, wo der fällige Zins nicht abgetragen, sondern von seiner Zahlzeit an als Capital betrachtet wird, und folglich wie selbes verzinset werden muß.

c. Die Rechnung, wo die einfachen Zinse bestimmet werden, die **einfache Zinsrechnung**. wo hingegen die Zinseszinse mit bestimmet werden, die **zusammengesetzte Zinsesrechnung**.

Zusatz: Die einfache Zinsrechnung als eine Anwendung der Proportionslehre ist aus dem vorhergehenden Abschnitte hinlänglich klar.

§. 277.

Lehrsatz:

Wenn ein Capital q jährlich an Interesse p abträgt, so beträgt das Capital a zu gleichen Procent sammt dem Interesse α so viel als $\frac{q+p}{q}$ a angiebt, d. i.

$$a + \alpha = \frac{q+p}{q} a.$$

Beweis:

$q : a = p : \alpha$ (§. 267.) mithin

$$\alpha = \frac{p}{q} a; \text{ also } a + \alpha = a + \frac{p}{q} a = a\left(1 + \frac{p}{q}\right) = \frac{q+p}{q} a.$$

§. 278.

Lehrsatz:

Wenn das Capital q, jährlich an Interesse p giebt, so giebt das Capital a in n Jahren, wenn man immer die Zinse zu dem Capital schlägt, d. i. das Capital mit Zinseszinsen, oder $s = \left(\frac{q+p}{q}\right)^n a$

Beweis:

1. Nach dem ersten Jahre ist Capital samt dem Zinse oder $A = \frac{q+p}{q} a$ (§. 277.)

2. Nach dem zweyten Jahre, während welchem also A als das Capital betrachtet werden muß, ist wieder Capital sammt Zinse, oder $B = \frac{q+p}{q} A$ (§. 277)

$= \left(\frac{q+p}{q}\right)^2 a.$

3. Aus den nemlichen Gründen ist nach dem 3ten Jahre

$C = \frac{q+p}{q} B = \left(\frac{q+p}{q}\right)^3 a.$

4. Nach dem vierten Jahre

$D = \frac{q+p}{q} C = \left(\frac{q+p}{q}\right)^4 a$, folglich

5. Wird nach n Jahren das Capital samt allen Zinseszinsen, oder $s = \left(\frac{q+p}{q}\right)^n a.$

Zusatz: Wenn von den 5 Stücken q, p, a, n, s vier bekannt sind, laßt sich allemal das 5te durch Rechnung finden; und da man gewöhnlich pro Cent rechnet, das ist, $q = 100$ Fl. setzet, so giebt es eigentlich vier verschiedene Aufgaben.

§. 279.

Aufgaben zur Uebung:

I. Aufgabe: Aus den gegebenen q, p, a, n die Größe s bestimmen.

Auflösung: $s = \left(\frac{q+p}{q}\right)^n a$ (§. 278.).

Beyspiel:

Zu welcher Summe erwachsen 100 Fl. zu 5 pro Cent. nebst Zinseszinsen in 20 Jahren?

Auflösung:

1. In diesem Beyspiele ist $q = a = 100$ Fl.; $p = 5$ Fl.; $n = 20$, mithin

2. $s = \left(\frac{105}{100}\right)^{20} 100 = \left(\frac{21}{20}\right)^{20} 100$

3. Nun ist $\log. 21 = 1{,}3222193$

$\log. 20 = 1{,}3010300$

$\log. \frac{21}{20} = 0{,}0211893$

$n = 20$

$\log.\left(\frac{21}{20}\right)^{n} = 0{,}4237860$

$\log. 100 = 2{,}0000000$

$\log. s = 2{,}4237860 = \log. 265{,}33$

Mithin $s = 265$ Fl. 19 Kr. 3 Pf.

II. Aufgabe:

Aus den gegebenen p, q, n, s das Capital a finden.

Auflösung:

$$s = \left(\frac{q+p}{q}\right)^{n} a;\ \text{mithin}\ a = s \times \left(\frac{q}{q+p}\right)^{n}$$

Beyspiel:

Wie groß muß das Capital seyn, damit es in 50 Jahren zu 5 pr. cent. sammt Zinseszinsen 1000 Fl. beträgt?

Auf=

Auflösung:

1. Im gegenwärtigen Beyspiele ist $q = 100$; $p = 5$, $n = 50$, $s = 1000$, und man sucht a; mithin

2. $a = 1000 \times \left(\frac{100}{105}\right)^{50} = 1000 \times \left(\frac{20}{21}\right)^{50}$

3. Nun ist log. 20 = 1,3010300
   log.compl. dc.21 = 8,6777807 — 10

   log. $\frac{20}{21}$ = 9,9788107 — 10
   = 0,9788107 — 1
   n = 50

   log. $\left(\frac{20}{21}\right)^n$ = 48,9405350 — 50
   = 0,9405350 — 2

4. log. 1000 = 3,0000000

   log. $\left(\frac{20}{21}\right)^n$ = 0,9405350 — 2

   log. a = 1,9405350 = log. 87,204

Folglich das gesuchte Capital $a = 87$ Fl. 12 Kr. 1 Pf.

III. **Aufgabe:**

Aus den gegebenen q, p, a, s die Anzahl der Jahre oder n suchen.

Auflösung:

$\left(\frac{q+p}{q}\right)^n a = s$; also $\left(\frac{q+p}{q}\right)^n = \frac{s}{a}$, mithin

$n \log \left(\frac{q+p}{q}\right) = \log. \left(\frac{s}{a}\right)$ d. i.

$n \times [\log. (q+p) - \log. q] = \log. s - \log. a$,

folg=

folglich $n = \frac{\log. s - \log. a}{\log. (q+p) - \log. q}$

Beyspiel:

Wie lange muß 100 Fl. zu 5 pro Cent. anfgelegt seyn, bis es mit Zinseszinsen 1000 Fl. beträgt?

Auflösung:

1. Gegenwärtig ist $q = a = 100$ Fl., $p = 5$ Fl.; $s = 10000$, und n wird gesucht, mithin ist

2. $n = \frac{\log. 1000 - \log. 100}{\log. 105 - \log. 100} = \frac{3 - 2}{0{,}0211893}$

(I. Auf. N. 2 u. 3.)

$= \frac{1}{0{,}0211893} = 47{,}1936$

3. Folglich ist $n = 47$ Jahre, 2 Monathe, 10 Tage.

IV. Aufgabe:

Aus q, a, n, s die Größe p finden.

Auflösung:

$\left(\frac{q+p}{q}\right)^n a = s$; mithin $\left(\frac{q+p}{q}\right)^n = \frac{s}{a}$;

und $\frac{q+p}{q} = \sqrt[n]{\frac{s}{a}}$; $q+p = q\sqrt[n]{\frac{s}{a}}$,

folglich $p = q\sqrt[n]{\frac{s}{a}} - q$.

Will man mit Logarithmen rechnen, so ist

$\log. (q+p) = \log. q + \frac{\log. s - \log. a}{n}$

Aus dieser Gleichung, wenn man aus den Logarithmen ihre Zahlen wieder setzet, läßt sich ferner p finden.

Bey-

Beyspiel:

Zu wie viel pro Cent. ist das Capital von 100 Fl. aufgelegt, wenn es in 20 Jahren sammt den Zinseszinsen 265 Fl. 19 Kr. 3 Pf. ausmacht?

Auflösung:

1. Im gegebenen Falle ist $q = a = 100$ Fl.; $n = 20$, $s = 265$ Fl. 19 Kr. 3 Pf. $= 265{,}33$ Fl., und man sucht p.

2. $\log.(100+p) = \frac{\log. 265{,}33 - \log. 100}{20} + \log. 100.$

3. Nun ist $\log. 265{,}33 = 2{,}4237864$
$\log. 100 = 2{,}0000000$
$\log. 265{,}33 - \log. 100 = 0{,}4237864$, mithin

4. $\log.(100+p) = \frac{0{,}4237864}{20} + 2 = 2{,}0211893$
$= \log. 105$, mithin

5. $100 + p = 105$, folglich $p = 5$; d. i. das Capital ist zu 5 pro Cent. aufgelegt.

§. 280.

Lehrsatz:

Wenn man von q jährlich p Zinsen erhält, und man legt für ähnliche Zinsen ein Capital a auf, vermehret solches jährlich um b, so wird nach n Jahren die Summe des gesammten aufliegenden Capitals mit Zinseszinsen

$s =$

$$s = \frac{\left(\frac{q+p}{q}\right)^n (pa + qb) - qb}{p}$$

Beweis:

1. Am Ende des ersten Jahres ist Capital sammt dem Zinse $= \frac{q+p}{q} a$ (§. 277.), da man solches aber

2. um b vermehret, so ist nach Verlaufe des ersten Jahres das ganze aufliegende Capital

$$A = \frac{q+p}{q} a + b.$$

3. Am Ende des zweyten Jahres giebt nun dieses Capital sammt den Zinsen, und noch hinzukommenden b, oder

$$B = \frac{q+p}{q} A + b = \left(\frac{q+p}{q}\right)^2 a + \left(\frac{q+p}{q}\right) b + b$$

4. Eben so wird nach dem dritten Jahre die ganze Summe

$$C = \frac{q+p}{q} B + b = \left(\frac{q+p}{q}\right)^3 a + \left(\frac{q+p}{q}\right)^2 b + \left(\frac{q+p}{q}\right) b + b$$

5. Am Ende des vierten Jahres

$$D = \frac{q+p}{q} C + b = \left(\frac{q+p}{q}\right)^4 a + \left(\frac{q+p}{q}\right)^3 b + \left(\frac{q+p}{q}\right)^2 b + \left(\frac{q+p}{p}\right) b + b.$$

6. Aus den nemlichen Gründen wird endlich die ganze Summe s nach n Jahren

$$s = \left(\frac{q+p}{q}\right)^n a + \left(\frac{q+p}{q}\right)^{n-1} b + \left(\frac{q+p}{q}\right)^{n-2} b + \ldots$$
$$\ldots\ldots + \left(\frac{q+p}{q}\right)^2 b + \left(\frac{q+p}{q}\right) b + b$$

$$= \left(\frac{q+p}{q}\right)^n a + \left[b + \left(\frac{q+p}{q}\right) b + \left(\frac{q+p}{q}\right)^2 b + \ldots\ldots \right.$$
$$\left. + \left(\frac{q+p}{q}\right)^{n-1} b \right]$$

7. Nun ist letztere Reihe eine geometrische (§. 220), wo das erste Glied $a = b$; der Exponent $m = \frac{q+p}{q}$, und n die Anzahl der Glieder angiebt, ferner $u = \left(\frac{q+p}{q}\right)^{n-1} b$, also $mu = \left(\frac{q+p}{q}\right)^n b$, mithin die Summe (§. 221.)

$$\frac{mu-a}{m-1} = \left[\left(\frac{q+p}{q}\right)^n b - b\right] : \left[\frac{q+p}{q} - 1\right]$$
$$= \left[\left(\frac{q+p}{q}\right)^n b - b\right] : \frac{p}{q} = \frac{bq\left(\frac{q+p}{q}\right)^n - pq}{p}$$

Folglich

8. $$s = \left(\frac{q+p}{q}\right)^n a + \frac{bq\left(\frac{q+p}{q}\right)^n - bp}{p}$$

$$=$$

$$= \frac{ap\left(\frac{q+p}{q}\right)^n + bq\left(\frac{q+p}{q}\right)^n - bq}{p}$$

$$= \frac{\left(\frac{q+p}{q}\right)^n (ap+bq) - bq}{p}$$

§. 281.

Aufgabe:

Ein Capital von 1000 Fl. ist zu 5 pro Cent aufgelegt, und wird nebst den Zinsen jährlich um 100 Fl. vermehret, wie groß wird die ganze Summe nach 25 Jahren?

Auflösung:

1. In gegenwärtiger Aufgabe ist $q:p = 100:5 = 20:1$, mithin $q = 20$; $p = 1$, $b = 100$; $a = 1000$, $n = 25$, und s wird aus der Formel §. 280 gesuchet, mithin ist

2. $s = \left(\frac{21}{20}\right)^{25} \times (1000 + 2000) - 2000$

3. Nun ist $\log. \frac{21}{20} = 00211893$ (§. 279. I. Aufg. N. 3.)

$$25 = 25$$

$$1059465$$
$$423786$$

$$\log. \left(\frac{21}{20}\right)^{25} = 0{,}5297325$$

$$\log. 3000 = 3{,}4771213$$

$$\log. \left(\frac{21}{20}\right)^{25} \times 3000 = 4{,}0068538 = \log. 10159{,}07$$

folg=

folglich

4. $s = 10159 - 2000 = 8159$ Fl.

Zusatz: Wenn von den 6 Stücken q, p, a, n, b, s fünf gegeben sind, so läßt sich aus der Formel §. 280 jedes fehlende Glied finden, da man ferner die Interessen pro Cento rechnet, das ist, $q = 100$, und eben so p durch Landesgebrauch schon vorher bekannt ist, so giebt es noch 4 verschiedene Aufgaben, die sich aus dieser Formel auflösen lassen.

§. 282

Aufgaben zur Uebung.

I. Aufgabe: Unter eben den Bedingungen wie §. 280 aus q, p, a, n, s die Größe b bestimmen.

Auflösung:

$$\frac{\left(\frac{q+p}{q}\right)^n (ap + bq) - bq}{p} = s \text{ (§. 280.)}$$

$$\left(\frac{q+p}{q}\right)^n ap + \left(\frac{q+p}{q}\right)^n bq - bq = ps$$

$$b\left[\left(\frac{p+q}{q}\right)^n q - q\right] = ps - \left(\frac{q+p}{q}\right)^n ap$$

$$b = \left[ps - \left(\frac{q+p}{q}\right)^n ap\right] : \left[\left(\frac{q+p}{q}\right)^n q - q\right]$$

II. Aufgabe:

Unter den nemlichen Bedingungen aus q, p, b, n, s das Capital a finden.

Auflösung:

$$\frac{\left(\frac{q+p}{q}\right)^n (ap+bq) - bq}{p} = s$$

$$\left(\frac{q+p}{q}\right)^n ap + \left(\frac{q+p}{q}\right)^n bq - bq = ps$$

$$a = \left[ps + bq - \left(\frac{q+p}{q}\right)^n bq\right] : \left(\frac{q+p}{q}\right)^n p$$

III. Aufgabe:

Unter eben den Bedingungen aus p, q, a, b, s die Anzahl der Jahre n angeben.

Auflösung:

$$\frac{\left(\frac{q+p}{q}\right)^n (pa+qb) - bq}{p} = s$$

$$\left(\frac{q+p}{q}\right)^n = \frac{ps+bq}{pa+bq}$$

$$n \log. \left(\frac{q+p}{q}\right) = \log. \left(\frac{ps+bq}{pa+bq}\right)$$

$$n = \log. \left(\frac{ps+bq}{pa+bq}\right) : \log \left(\frac{q+p}{q}\right)$$

§. 283.

Lehrsatz:

Wenn das Capital a unter den Bedingungen §. 280 aufgelegt wird, wenn man hingegen, statt solches jährlich mit einer Summe zu vermehren, jedes Jahr b davon hinwegnimmt, so ist nach n Jahren der Rest

$$R = \frac{\left(\frac{q+p}{q}\right)^n (a\,p - b\,q) + b\,q}{p}$$

Beweis:

Man kann solchen entweder nach den nemlichen Gründen, in der nemlichen Ordnung, wie §. 280 führen, oder man kann die aufgestellte gegenwärtige Formel unmittelbar aus jener ableiten, indem man b negativ setzet, und statt s, R nimmt.

I. Zusatz: Aus dieser Formel, da man wieder $q = 100$ und eben so p als gegeben ansehen kann, lassen sich wieder 4 verschiedene Aufgaben auflösen.

II. Zusatz: Wenn man §. 280 und §. 282 allenthalben b negativ, und $R = S$ setzet, so erhält man zur Auflösung dieser Aufgaben folgende 4 Formeln:

I. $$R = \frac{\left(\frac{q+p}{q}\right)^n (pa - bq) + bq}{p}$$

$$\text{II. } b = \left[\left(\frac{q+p}{q}\right)^n pa - pR \right] : \left[\left(\frac{q+p}{q}\right)^n q - q \right]$$

$$\text{III. } a = \left[pR + \left(\frac{q+p}{q}\right)^n bq - bq \right] : \left(\frac{q+p}{q}\right)^n p$$

$$\text{IV. } n = \log\left(\frac{pR-bq}{ap-bq}\right) : \log\left(\frac{q+p}{q}\right)$$

$$= \log\left(\frac{-(bq-pR)}{-(bq-ap)}\right) : \log\left(\frac{q+p}{q}\right)$$

$$= \log\left(\frac{bq-pR}{bq-ap}\right) : \log\left(\frac{q+p}{q}\right)$$

§. 284.

Erklärungen:

Wenn ein Schuldner mit dem Gläubiger den Vertrag errichtet, daß er die empfangene Summe mit dem Zinse in einer bestimmten Zeit, und zwar jährlich zu gleichen Theilen abtragen soll, so nennet man

a. den Gläubiger den **Rentenirer**, und den Schuldner den **Entrepreneur**.

b. das ausgelegte Capital die **Mise**, und die davon jährlich zu entrichtende Summe, die **Rente**;

c. den Vertrag selbst einen **Rentenvertrag**, und zwar

α. einen Jahr-Zeitrentenvertrag, oder Annuitätenvertrag, wenn die Zeit, in welcher die ganze Summe heimbezahlet werden soll, unmit-

mittelbar, d. i., in 20 oder 30 Jahren, u. s. w. angegeben ist;

β. einen Leibrentenvertrag, wenn diese Zeit mittelbar bestimmet ist, wenn nemlich die Rente so lange dauern soll, als der Rentenirer am Leben ist.

I. Zusatz: Die Annuitätenrechnung ist eine Anwendung der im vorhergehenden §. bestimmten Formeln, wo allemal durch a. die Mise, durch b die jährliche stipulirte Rente, durch $\frac{p}{q}$ das Verhältniß des Capitals zum Zinse bezeichnet ist, und da nach verflossenem Zeittermine n das Capital sammt Zinsen heimbezahlet seyn muß, so ist allemal $R = 0$.

II. Zusatz: Bey Leibrenten geschieht die Berechnung nach den nemlichen Formularen, nur muß die Zeit n, das ist, die wahrscheinliche Lebensdauer des Rentenirers nach Mortalitätslisten bestimmet werden, je größer nun die Anzahl der Rentenirer ist, desto zuverläßigere Wahrscheinlichkeit erhält man aus diesen Listen im Allgemeinen für die Lebensdauer.

§. 285.

I. Aufgabe:

Wie groß ist die jährlich zu beziehende Rente auf 30 Jahre von einem Capital 6000 Fl. zu 5 pr. Cent.?

Auf-

Auflösung:

1) Bey dieser Aufgabe ist $q : p = 100 : 5 = 20 : 1$, also $q = 20$; $p = 1$; $a = 6000$; $n = 30$, $K = 0$, und b wird gesuchet.

2. Es ist aber §. 283. II. Zus. II.

$$b = \left[\left(\frac{q+p}{q} \right)^n pa - pR \right] : \left[\left(\frac{q+p}{q} \right)^n q - q \right]$$

3. $\log. \left(\frac{q+p}{q} \right) = \log. \frac{21}{20} = 0{,}0211893$

$$n = 30 = 30$$

$$\log. \left(\frac{q+p}{q} \right)^n = 0{,}6356790$$

$$= \log. 4{,}32194, \text{ mithin}$$

4. $\left(\frac{q+p}{q} \right)^n pa - Rp = 4{,}32194 \times 6000$

5. $\left(\frac{q+p}{q} \right)^n q - q = 4{,}32194 \times 20 - 20 = 66{,}4388$

6. Nun ist,

	log. 4,32194	= 0,6356790
	log. 6000	= 3,7781513
log. compl.	dec. 66,4388	= 8,1775782 — 10

$$\log. b = 2{,}5914085 = \log. 390{,}31$$

Mithin ist

7. die zu beziehende Rente 390 Fl. 18 Kr. 2 Pf.

II. Aufgabe:

Wie groß muß die zu 5 pro Cent. angelegte Mise seyn, wenn sie 20 Jahre eine jährliche Rente von 400 Fl. ertragen soll?

Auflösung.

1. In dieser Aufgabe ist wieder $q = 20$, $p = 1$, $b = 400$, $n = 20$, $R = 0$, und man suchet a.

2. Nun ist $a = \left[pR + \left(\frac{q+p}{q}\right)^n bq - bq \right] : \left(\frac{q+p}{q}\right)^n p$

3. log. $\left(\frac{q+p}{q}\right)^{20} = 20 \times 0{,}0211893 = 0{,}4237860$

$= \log. 2{,}6533$

4. $\left(\frac{q+p}{q}\right)^n bq - bq = 2{,}6533 \times 8000 - 8000$

$= 13226{,}4$

5. log. $13226{,}4 = 4{,}1214416$

log. $\left(\frac{21}{20}\right)^{20} = 0{,}4237860$

log. a $= 3{,}6976556 = \log. 4984{,}9$

Folglich muß

6. das zuerlegende Capital oder Mise 4984 Fl. 54 Kr. seyn.

III. Aufgabe:

Wenn vom Capital 100000 Fl. zu 5 pr. Cent. jährlich 6000 Fl. Renten fließen, auf wie viele Jahre erstrecket sich dieser Genuß?

Auflösung:

1. In diesem Falle ist wieder $q = 20$, $p = 1$, $a = 100000$, $b = 6000$, $R = 0$, und n wird gesucht.

2. Nun ist §. 283. II. Zus. IV.

$$n = \log.\left(\frac{bq - pR}{bp - ap}\right) : \log.\left(\frac{q+p}{q}\right)$$

3. $$\frac{bq - pR}{bq - ap} = \frac{120000}{120000 - 100000} = \frac{120000}{20000} = 6$$

$$\log.\left(\frac{bq - pR}{bq - ap}\right) = \log. 6 = 0{,}7781513$$

4. $\log.\left(\frac{q+p}{q}\right) = \log.\left(\frac{21}{20}\right) = 0{,}0211893$, mithin

5. $$n = \frac{0{,}7781513}{0{,}0211893} = 36{,}723, \text{ d. i.}$$

Die Renten fließen 36 Jahre, 8 Monathe, 20 Tage.

§. 286.

Erklärungen:

Errichtet eine Gesellschaft einen Vertrag, daß jedes Mitglied ein gewisses Capital erlegen will, von derer Summe den Mitgliedern jährlich bis zum Tode des letzten Mitgliedes immer eine gleiche Rente ausgezahlet, und daß solche unter die überlebenden vertheilet werden soll, so heißt

a. dieser Vertrag eine **Tontine**,

b. Die Mitglieder, die das Capital erlegen, Tontinisten,

c. jene Person oder Gesellschaft, welche für die empfangene Summe jährlich die Renten auszahlet, der **Tontiniarius.**

Anmerkung: Die **Tontine** hat den Namen vom **Lorenz Tonti**, einem Neapolitaner, der zuerst den Plan davon ungefähr ums Jahr 1663 im Dienste Frankreichs entwarf, wo sie auch im J. 1689 zu Stande kam.

Zusatz: Die Berechnung bey Tontinen ist jener von Leibrenten ähnlich, und ist ebenfalls eine Anwendung von den Formeln §. 283. II. Zus.

§. 287.

Erklärungen:

Wenn ein Schuldner ein Capital nach einer gewißen Zeit ohne Zinsen zu zahlen hat, hingegen sich erbiethet, solches vor der verflossenen Zeit heimzuzahlen, so pflegt der Gläubiger etwas an der Schuld zu erlassen, diesen Nachlaß, welchen der Schuldner bey der wirklichen Bezahlung abziehen darf, nennet man den **Rabatt**, oder **Interusurium**, und dessen Berechnung die **Rabatt**- oder **Interusuriumrechnung.**

Zusatz: Nach dem rechtlichen Princip darf der Rabatt weder den Gläubiger, noch den Schuldner bevortheilen, man nimmt also an, die auf der Stelle erleg-

te Summe müsse so groß seyn, daß der Gläubiger durch sie nach landesüblichen Zinsen bis zum Zahlungstermine das ganze Capital erhält, und daß der Rabatt nach eben den Zinsen dem Schuldner so viel abwirft, als er durch den Gebrauch des Capitals bis zum Zahlungstermine erhalten hätte.

§. 288.

Lehrsatz:

Wenn die Bezahlung eines Capitals a, das erst nach einem Jahre fällig ist, auf der Stelle entrichtet wird, so ist beym Rabbatiren, mit landesüblichen Zinsen von q, p genommen, die zu entrichtende Summe

$$s = \frac{q}{q+p}\, a$$

Beweis.

1. Vermög der Annahme ist $q : a = p : x$; mithin $x = \frac{p}{q}\, a$, d. i., das jährliche Interesse beträgt alle-mal $\frac{p}{q}$ vom Capital.

2. Bezahlet also der Schuldner auf der Stelle das Capital a, so kann er davon am Ende des Jahres $\frac{p}{q}\, a$ Zinsen vom Gläubiger fodern, weil er solche bey Zurückbehaltung von a hätte erhalten können.

3. Zieht er aber auf der Stelle vom Capital diese Summe ab, d. i. bezahlt er nur $a - \frac{p}{q} a$, so nimmt er etwas, wozu er erst nach einem Jahre berechtiget ist, und von dem also der Gläubiger den Zins $\frac{p}{q} \cdot \frac{p}{q} a = \frac{p^2}{q^2} a$ Nr. 1. nach einem Jahre fodern kann.

4. Entrichtet nun der Schuldner solchen auf der Stelle, d. i., erlegt er $a - \frac{p}{q} a + \frac{p^2}{q^2} a$, so zieht wieder der Gläubiger einen Zins, auf den er erst nach einem Jahre ein Recht hat, mithin muß er wieder davon den Zins $\frac{p}{q} \cdot \frac{p^2}{q^2} a = \frac{p^3}{q^3} a$ bezahlen, also bekömt er, wenn solches auf der Stelle abgezogen wird

$$a - \frac{p}{q} a + \frac{p^2}{q^2} a - \frac{p^3}{q^3} a$$

5. Auf diese Art lassen diese Schlüsse immer fortsetzen, mithin läßt sich die Summe, welche auf der Stelle entrichtet werden muß, durch nachstehende unendliche Reihe darstellen.

$$s = a - \frac{p}{q} a + \frac{p^2}{q^2} a - \frac{p^3}{q^3} a + \frac{p^4}{q^4} a - \ldots.$$

$$= a - a \left(\frac{p}{q} - \frac{p^2}{q^2} + \frac{p^3}{q^3} - \frac{p^4}{q^4} + \ldots. \right)$$

6. Da nun $\frac{p}{q}$ ein ächter Bruch, und zugleich der Exponent der in den Klammern enthaltenen geometrischen Reihe ist, so wird (§. 224.)

$s =$

$$s = a - a\left(\frac{p}{q+p}\right) = \frac{aq + ap - ap}{q+p} = \frac{q}{q+p}a$$

Zusatz: Der auf ein Jahr treffende Rabatt $R = a - s$

$$= a - \frac{q}{q+p}a = \frac{p}{q+p}a.$$

§. 289.

Aufgabe:

Es ist Jemand nach einem Jahre unverzinslich 1000 Fl. zu zahlen schuldig, wie viel muß er erlegen, wenn er diese Schuld auf der Stelle abführen will, und 5 pr. Cent. die landesüblichen Zinse sind?

Auflösung:

In dieser Aufgabe ist $q = 20$, $p = 1$, $a = 1000$, mithin §. 288.

$$s = \frac{q}{q+p}a = \frac{20}{21} \times 1000 = 952{,}381,$$

folglich muß er 952 Fl. 22 Kr. 3 Pf. 1 Hl. erlegen.

Zusatz: Der Rabatt beträgt also $R = \frac{p}{q+p}a = \frac{1}{21}$

$\times$ 1000 = 47 Fl. 37 Kr. — Pf. 1 Hl.

§. 290.

Lehrsatz:

Wenn ein Capital a nach n Jahren unverzinslich zu bezahlen ist, solches aber auf der Stelle entrichtet wird,

$= s$

wird, so ist die Summe, bey landesüblichen Zinsen von p, p, die erlegt werden muß $s = \left(\frac{q}{q+p}\right)^n a$.

Beweis:

1. Bey Anticipation der Zahlung von einem Jahre beträgt die zu erlegende Summe

$$A = \frac{q}{p+q} a \text{ (§. 288.)}$$

2. Wird nun diese Zahlung wieder um ein Jahr, mithin im Ganzen um 2 Jahre früher erlegt, so ist die zuerlegende Summe

$$B = \frac{q}{p+q} A = \left(\frac{q}{p+q}\right)^2 a$$

3. Bey der Anticipation von 3 Jahren ist solche

$$C = \frac{q}{p+q} B = \left(\frac{q}{p+q}\right)^3 a, \text{ mithin}$$

4. Wenn die Zahlung n Jahre früher geschieht, so ist die treffende Summe

$$s = \left(\frac{q}{p+q}\right)^n a.$$

§. 291.

Aufgabe:

Wie groß ist die Summe, die vom Capital 1000 Fl., welches unverzinslich nach 20 Jahren heimbezahlt werden muß, zu entrichten ist, wenn die Schuld auf

der

der Stelle abgeführet wird, und 5 pro Cent. der jährliche übliche Zins ist?

Auflösung:

1. Im gegebenen Falle ist $q = 20$; $p = 1$; $a = 1000$ Fl., $n = 20$; mithin

$$s = \left(\frac{20}{21}\right)^{20} \times 1000$$

2. Nun ist log. 20 = 1,3010300

log.compl.dec. 21 = 8,6777807 — 10

$$\log. \left(\frac{20}{21}\right)^{20} = 0,9788107 - 1$$

$$\log. \left(\frac{20}{21}\right)^{20} = 19,5762140 - 20$$

$$= 0,5762140 - 1$$

log. 1000 = 3,0000000

log. s = 2,5762140 = log. 376,89

Folglich

3. Muß auf der Stelle die Summe 376 Fl. 53 Kr. 1 Pf. 1 Hl. erleget werden.

VIII. Hauptstück.

Infinitesimalrechnung.

I. Abschnitt.

Vom Begriffe und den Grundsätzen der Infinitesimalrechnung.

§. 292.

Grundsatz:

Jede Veränderung einer Größe geschieht nach dem **Gesetze der Stättigkeit**, d. i., wenn man einer veränderlichen Größe nach einander zwey verschiedene Werthe beyleget, so lassen sich unendlich viele Zwischenwerthe angeben, die ihr zukommen, ehe sie vom ersten zum zweyten Werthe gelanget.

§. 293.

Erklärungen:

a. Größen, die in dem Ausdruck einer Aufgabe, oder eines Satzes, selbst vorkommen, oder Functionen solcher Größen sind, heißen **nothwendige** oder **Hauptgrößen**; — die man hingegen belie-

big

big annimmt, um die verwickelten Verhältnisse der Hauptgrößen leichter einzusehen, heißen zufällige, willkührliche Neben- oder Hilfsgrößen.

b. Wenn man zu einer veränderlichen Größe x eine Hilfsgröße x' so annimmt, daß sie sich der Hauptgröße x nach Belieben nähern, und ihr selbst gleich werden kann, so heißt sie die correspondirende Hilfsgröße oder überhaupt die Hilfsgröße von x, und x die Hauptgröße von x'. Um dieses Verhältniß einer Hilfsgröße zur Hauptgröße auszudrücken, giebt man solcher mit der Hauptgröße einerley Buchstaben, setzet ihr aber ein Zeichen bey; so z. B. sind x', x'' Hilfsgrößen von x, und y', y'' von y, und so weiter.

Zusatz: Hilfsgrößen sind veränderliche Größen; aber nicht umgekehrt, indem eine veränderliche Größe keine Hauptgröße seyn kann.

§. 294.

Erklärungen:

a. Gränze eines Dinges ist, wo es aufhöret.

b. Gränze einer veränderlichen Größe ist jener Werth, dem sie sich immer nähert, und wenn sie solchen erreicht hat, ihre Zu- oder Abnahme vollendet ist, mithin die veränderliche Größe als solche aufhöret. Dieser Werth heißt auch insoferne der letzte Werth der veränderlichen Größe,

als

als er in der That unter den unendlich vielen Werthen, die dieser Größe auf jeder Stuffe bey ihrer Annäherung zur Gränze (§. 292.) zukommen, der letzte ist.

c. Das Verhältniß zweyer veränderlicher Größen an ihren Gränzen heißt aus eben dem Grunde das letzte Verhältniß oder Gränzverhältniß.

I. Zusatz: Hauptgrößen, selbst, wenn sie veränderliche Größen sind, haben keine eigentliche Gränzen. Denn es giebt keinen Werth, dem sie sich annähern, sondern solcher ist allemal, sobald die Aufgabe vollkommen bestimmt ist, gegeben (§. 167. III. Zus.).

II. Zusatz: Die Hauptgröße ist allemal die Gränze ihrer Hilfgröße; denn da sich letztere der erstern allmählig immer nähern kann, so hört sie auf, Hilfsgröße zu seyn, sobald sie die Hauptgröße erreichet hat, mithin ist die Hauptgröße ihre Gränze, oder letzter Werth.

III. Zusatz Das letzte Verhältniß einer Hilfsgröße zu ihrer Hauptgröße z. B. $x' : x$ ist ein Verhältniß der Gleichheit; denn wenn $x' - x = 0$, mithin x' die Gränze erreicht hat, so ist $x' = x$, mithin $x' : x = 1 : 1$.

IV. Zusatz: Das letzte Verhältniß zweyer Hilfsgrößen x''. x', die eine gemeinschaftliche Gränze x haben, ist ein Verhältniß der Gleichheit; denn wenn von x'' sowohl, als x', die Hauptgröße x die Gränze ist, mithin $x'' - x = 0$, $x' - x = 0$; so ist $x'' : x' = x : x = 1 : 1$ das letzte Verhältniß.

V. Zu=

V. Zusatz: Das letzte Verhältniß zweyer verschiedener Hilfsgrößen x', y' ist das Verhältniß ihrer Hauptgrößen x, y; denn da $x' - x = 0$; und $y' - y = 0$ wird, wenn x' und y' an der Gränze sind, so ist ihr letztes Verhältniß $x' : y' = x : y$.

§. 295.

Erklärungen:

a. Unendlich ist, was keine Gränzen hat.

b. Eine Größe, die einer unendlichen Abnahme fähig ist, also 0 zur Gränze, oder was einerley ist, deren Abnahme keine Gränzen hat, heißt **dieser Fähigkeit wegen unendlich klein** (infinite parvum potentia), und wenn man sie an ihrer Gränze annimmt, eine **verschwindende Größe**, welche man entweder durch $\frac{1}{\infty}$ oder auch mit 0 bezeichnet.

c. Eine Größe, in wieferne sie einer unendlichen Zunahme fähig ist, oder $\frac{1}{0}$ zur Gränze hat, heißt **unendlich groß** (infinite magnum potentia), und wenn man solche an ihrer Gränze vorstellt (infinite magnum actu), so drücket man sie mit ∞, oder $\frac{1}{0}$ aus.

I. Zusatz: Unendlich kleine Größen sind keine Hauptsondern Hilfsgrößen; denn von erstern ist ihr Werth durch die Aufgabe bestimmet (§. 294. I. Zus.); letztere aber können jeden beliebigen Werth von einer

bestimmten Gröſse an bis auf o erhalten, das ist, eine unendlich kleine Gröſse ist eine Hilfsgröſse, der man anfänglich einen beliebigen Werth giebt, und die man in der Folge bis auf o abnehmen läßt.

II. Zusatz: Der Unterschied einer Hilfsgröſse und ihrer Hauptgröſse, d. i. $x' - x$ ist unendlich klein; denn da x die Gränze von x' ist, so kann man anfangs x' so annehmen, daß $x' - x$ einen beliebigen Werth erhält, nachhin x' seiner Gränze x immer näher rücken, und selbst $x' = x$ setzen, folglich kann $x' - x$ bis auf o abnehmen.

III. Zusatz: Der Unterschied zweyer Hilfsgröſsen x'', x', die einerley Hauptgröſse x zur Gränze haben, oder $x'' - x'$, ist eine unendlich kleine Gröſse. Denn da x'', x' Hilfsgröſsen sind, so kann man sie so annehmen, daß $x'' - x'$ einen beliebigen Werth erhält, da nun x von beyden die Gränze ist, so wird $x'' - x'$ immer abnehmen, wenn sich x'' sowohl als x' ihrer Gränze x nähern, und an der Gränze selbst $x'' - x' = o$ seyn.

§. 296.

Erklärungen:

a. Wenn sich das Verhältniß zweyer Gröſsen $x : z$ dem Verhältnisse $1 : o$ immer mehr nähert, mithin ihr letztes Verhältniß $= 1 : o$ ist, so heißt z in Beziehung auf x unendlich klein, und die Gröſse x in Beziehung auf z unendlich groß.

b.

b. Wenn der Unterschied zweyer Größen so beschaffen ist, daß er zwar anfangs einen beliebigen Werth hat, aber bis auf o abnehmen kann, mithin eine unendlich kleine Größe ist, so sagt man, **die eine Größe sey von der andern unendlich wenig unterschieden.**

Zusatz: Wenn z in Beziehung auf x unendlich klein ist, so ist x von $x \pm z$ unendlich wenig unterschieden; denn da das letzte Verhältniß von $x : z = 1 : o$ ex hyp., so ist von z der letzte Werth $= o$, oder $z = o$; mithin $(x \pm z) - x = o$ die Gränze.

§. 297.

Erklärung:

Die Wissenschaft von unendlichen Größen heißt **Infinitesimalrechnung**, oder wegen der dabey üblichen analytischen Methode, die **Analysis des Unendlichen.**

Zusatz: Die Infinitesimalrechnung, inwieferne sie unendliche, das ist, Hilfsgrößen, mithin Größen aufnimmt, die als zufällige, zur Aufgabe nicht gehörige Größen, am Ende wieder weggeschaffet werden müssen, kann man eine **unvollendete Rechnung** nennen; denn sobald die Hilfs = oder unendlichen Größen entfernt sind, mithin nur Haupt = also endliche Größen vorkommen, so gehört der Calcul zur gewöhnlichen Algebra, oder Analysis des Endlichen.

§. 298.

§. 298.

Erklärungen:

a. Eine Gleichung, in welcher die beyden Seiten nach aller Schärfe einander gleich sind, mithin auf keiner Seite etwas fehlet, heißt eine **vollständige Gleichung** (aequatio completa).

b. Wenn hingegen die Seiten zwar ungleich, aber so beschaffen sind, daß ihr Unterschied unendlich klein, mithin das letzte Verhältniß der Seiten, ein Verhältniß der Gleichheit ist, so kann man, wenn die Seiten in einer Gleichung dargestellt werden, diesen Ausdruck eine **unvollständige Gleichung** (aequatio incompleta) nennen.

c. Wenn die Seiten aber ungleich, und ihr Verhältniß bestimmt ist, und keine Annäherung zum Verhältnisse der Gleichheit Statt hat, so ist die Gleichung **falsch** (aequatio falsa).

I. **Zusatz:** Wenn man eine unvollkommene Gleichung nach den gewöhnlichen Reductionsgesetzen der Algebra behandelt, so bleibt sie eine unvollständige Gleichung.

II. **Zusatz:** Wenn man in einer unvollständigen Gleichung nur die letzten Werthe, d. i. die Werthe der Hilfgrößen an ihren Grönzen betrachtet, so wird sie eine vollständige Gleichung.

§. 299.

Lehrsatz:

Wenn man in einer unvollständigen Gleichung an die Stelle einer Größe eine andere setzet, die von ihr unendlich wenig unterschieden ist, so erhält man durch diese Substitution keine falsche Gleichung, das heißt, sie wird dadurch entweder eine vollständige, oder sie bleibt wenigstens eine unvollständige Gleichung.

Beweis:

Vermög der Annahme wird an die Stelle einer Grösse eine andere gesetzet, die mit ihr einerley letzten Werth hat, folglich bleiben auch nach dieser Verwechslung die letzten Werthe der Seiten die nemlichen, und ihr letztes Verhältniß einerley: war also solches vorher das Verhältniß der Gleichheit, so bleibt dieses auch noch nach der Substitution, und die Gleichung hat wieder das Merkmal einer unvollständigen Gleichung, und ist also keine falsche Gleichung.

§. 300.

Lehrsatz:

Eine Gleichung, die bloß Hauptgrößen enthält, kann keine unvollständige Gleichung seyn.

Beweis:

In einer unvollständigen Gleichung sind ihre Seiten ungleich; aber unendlich wenig von einander unterschieden, und ihr letztes Verhältniß ein Verhältniß der Gleichheit, zu welchem eine beliebige Annäherung Statt hat; in einer Gleichung aber, die nur Hauptgrößen enthält, derer Werth durch die Aufgabe bestimmt ist, ist keine solche Annäherung zum Verhältniß der Gleichheit zwischen den Seiten möglich, sie kann also keine unvollständige Gleichung seyn.

§. 301.

Lehrsatz:

Eine unvollständige Gleichung, aus der man nach §. 299 alle Hilfsgrößen weggeschaffet hat, wird dadurch in eine vollständige Gleichung verwandelt.

Beweis:

Eine solche Gleichung ist keine falsche (§. 299.), und keine unvollständige (§. 300.), mithin muß sie eine vollständige werden.

I. Zusatz: Da sich jede Gleichung in eine Proportion, und jede Proportion in eine Gleichung auflösen läßt (§. 210. IV. — VI. Zus.), so lassen sich ebenfalls vollständige und unvollständige Proportionen annehmen, und auf sie leicht die 3 Lehrsätze anwenden.

II. Zusatz: Unvollständige Gleichungen und Proportionen, derer Merkmale die vorhandenen Hilfsgrös-

 sen

sen sind, lassen sich durch Eliminirung dieser Hilfsgrößen in vollständige verwandeln, folglich ist ihr Gebrauch in der Mathematik zuläßig, so wie man sich beym Mangel directer Beweise der indirecten bedient.

Anmerkung. Auf diese bisher angeführten Gründe stützet sich die Infinitesimalrechnung, wenn man unendlich kleine Größen in einer Entfernung von ihren Gränzen, wo sie also noch einen wahren endlichen Werth haben, weglaßt; man nimmt nemlich zur Erleichterung und Abkürzung des Calculs unvollständige Gleichungen, entfernt aber nach und nach die Hilfsgrößen, und gelangt auf diesem einfachen Wege auf eben die Resultate, nemlich auf eine vollständige Gleichung. Carnot hat diese Gründe in seinen Betrachtungen über die Theorie der Infinitesimalrechnung vollständig entwickelt. In eben dieser Abhandlung wird auch die andere Methode der Infinitesimalrechnung, nach welcher man nur die Verhältnisse der unendlich kleine Größen an ihren Gränzen darstellet, und die daher die Gränzmethode heißt, gerechtfertiget. Ich bediene mich meistens der erstern, weil sie mir für den Anfänger faßlicher scheint, der dabey die Construction nie aus den Augen verlieret, indem alle Theile noch einen endlichen Werth behalten, mithin darstellbare und anschauliche Größen bleiben; ich werde aber auch weiter unten die Natur und Gründe der Gränzmethode darstellen, so daß es noch jedem frey stehet, zwischen beyden zu wählen, da sie

im Calcul selbst nicht unterschieden sind, und beyde auf einerley gleich gewisse Resultate führen, so wie ich selbst von dieser Methode Gebrauch machen werde, wenn ich dadurch eine Aufgabe kürzer und faßlicher aufzulösen im Stande bin.

§. 302.

Erklärungen:

a. Wenn man zu einer veränderlichen Hauptgröße x eine Hilfsgröße x′ so annimmt, daß x′ — x eine unendlich kleine Größe ist, so heißt dieser Unterschied, oder diese unendlich kleine Größe das **Differential** von x, und wird mit dx bezeichnet, eben so drückt dy das Differential einer andern veränderlichen Hauptgröße y aus; d. i. $x' - x = dx$, und $x' = x + dx$, eben so $y' - y = dy$ und $y' = y + dy$; inwieferne dx, dy an ihrer Gränze betrachtet werden, setzet man solchen das Zeichen lim. vor; z. B. lim. dx; lim. dy.

b. Wenn y eine Function der Hauptgröße x, also selbst eine veränderliche Hauptgröße ist; so heißen x, y zusammengehörige Größen; wenn man nun statt x die Hilfsgröße $x' = x + dx$ setzet, so wird dadurch die Hilfsgröße $y' = y + dy$ bestimmet, man nennet daher dx, dy die Differentiale der zusammen gehörigen Größen x, y oder zusammengehörige Differentiale.

c. Wenn man zur veränderlichen Hauptgröße x nebst x′ noch eine Hilfsgröße x″ annimmt, so daß x″ — x′

wieder eine unendlich kleine Größe dx' ist, so heißt $dx' - dx$ ein Differentio-Differential, oder ein Differential der zweyten Ordnung, und wird mit d^2x bezeichnet; d. i. $dx' = dx + d^2x$, und eben so $dy' = dy + d^2y$; im Falle nun y wieder eine Function von x ist, so heißen d^2x, d^2y zusammengehörige Differentiale der zweyten Ordnung.

d. Auf ähnliche Weise erhält man Differentialen der dritten, 4ten Ordnung und so weiter, die mit d^3x, d^4x, ... d^nx bezeichnet werden.

e. Um $dx \times dx$ zu bezeichnen, schreibt man dx^2; eben so $dx \times dx \times dx = dx^3$ u. s. f.

I. Zusatz: dx^2, oder $dx\,dy$ ist im Verhältniß zu dx unendlich klein; denn $dx : dx^2 = 1 : dx$; da nun dx die Null zur Gränze hat; so ist das letzte Verhältniß $dx : dx^2 = 1 : 0$ (§. 296. a.); eben so ist $dx : dxdy = 1 : dy$, und da 0 die Gränze von dy ist, so wird das letzte Verhältniß $dx : dxdy = 1 : 0$.

II. Zusatz: Aus eben diesen Gründen ist dx^3, oder $dx\,dy^2$, und $dxdydz$ im Verhältnisse zu dx^2 unendlich klein.

III. Zusatz: d^2x ist in Beziehung auf dx unendlich klein; denn da $d^2x = dx' - dx$; so ist $dx : d^2x = dx : dx' - dx$; nun kann die Hilfsgröße x'' jeden beliebigen Werth haben, mithin dx' immer näher dem Differential dx rücken, oder dx ist die Gränze von dx', mithin das letzte Verhältniß: $dx : d^2x = dx : dx(1-1) = 1 : 0$ (§. 296. a.).

IV.

IV. **Zusatz:** Aus ähnlichen Gründen leuchtet ein, daß d^3x im Verhältnisse zu d^2x, und überhaupt $d^n x$ in Beziehung auf $d^{n-1}x$, d. i. ein Differential von einer jeden Ordnung in Beziehung auf das Differential der nächst niedern Ordnung unendlich klein sey.

II. Abschnitt.

Differentialrechnung.

§. 303.

Erklärungen:

a. Von einer Größe ihr Differential angeben, heißt sie **differentiiren**, das ist: wenn X eine Function von einer, oder mehreren veränderlichen Größen x, y ist, so heißt X differentiiren so viel, als die Größe angeben, um welche die Function zu- oder abnimmt, wenn sich die Größen x, y um dx, dy verändern, man setzet der Function das Zeichen d vor, z. B. $d(xy)$ heißt, man soll das Differential dieses Productes angeben.

b. Die Wissenschaft gegebene Größen zu differentiiren, heißt die **Differentialrechnung.**

§. 304.

Lehrsatz:

Das Differential von der Summe, oder Differenz zweyer Größen, ist die Summe oder Differenz der Differentiale ihrer Theile, das ist:

$$d(x \pm y) = dx \pm dy$$

Beweis:

Man setze $X = x \pm y$, so ist (§. 303. a)

$X' = x + dx \pm y \pm dy$; mithin

$X' - X = dX = d(x \pm y) = dx \pm dy$

Zusatz: $d(a+x) = dx$; $d(ax) = a\,dx$.

§. 305.

Lehrsatz:

Das Differential eines Productes zweyer veränderlichen Größen ist die Summe der Differentiale eines jeden Factors in das Differential des andern Factors multiplicirt, das ist:

$$d(xy) = y\,dx + x\,dy$$

I. Beweis:

Man setze $X = xy$, so ist

$X' = (x+dx)(y+dy) = xy + ydx + xdy + dxdy$

also $X' - X = dX = d(xy) = ydx + xdy + dxdy$.

Nun ist dxdy in Beziehung auf $ydx + dxy$ unendlich klein (§. 302. I. Zus.), mithin der Unterschied von $ydx + xdy$ und $ydx + xdy + dxdy$ unendlich klein (§. 296 Zus.); folglich

$d(xy) = ydx + xdy$ eine unvollständige Gleichung (§. 298. b.), die man ihrer einfachen Gestalt wegen statt der vollständigen im Calcul annimmt (§. 301.).

II. Beweis:

Bey Anwendung der Gränzmethode verfährt man nach folgenden Gründen:

1. $X = xy$

$X' = xy + ydx + xdy + dxdy$, also

$X' - X = dX = ydx + xdy + dxdy$, und

$\frac{dX}{dx} = y + x\frac{dy}{dx} + dy$

2. Man legt den Hilfsgrößen dx, dy, mithin auch dX anfänglich einen bestimmten Werth bey, das ist, man betrachtet die Größen in einer bestimmten Entfernung von ihrer Gränze, dadurch ist auch ihr Verhältniß ein bestimmtes Verhältniß;

3. Nun läßt man sie bis 0 abnehmen, oder betrachtet solche als verschwindende Größen an ihrer Gränze, so geschieht ihre Veränderung nach dem Gesetze der Stättigkeit, und durch eben dieses Gesetz ist die Veränderung ihres Verhältnisses bestimmet (§. 292.)

4. So lange noch dx, dy von ihrer Gränze entfernt sind, also einen bestimmten Werth haben, so ist $\frac{dX}{dx} = y + x\frac{dy}{dx}$ eine unvollständige Gleichung, je näher nun dx, dy ihrer Gränze 0 kommen, desto mehr nähert sich das Verhältniß der beyden Seiten dem Verhältnisse der Gleichheit, folglich an der Gränze selbst ist dem Gesetze der Stättigkeit gemäß $\lim. \frac{dX}{dx} = y + x \lim. \left(\frac{dy}{dx}\right)$ eine vollständige Gleichung (§. 298. II. Zus.).

5. Man kann also dx, dy u. s. w., wenn sie mit andern Größen durch + , oder — verbunden sind, als wahre Nullen weglassen, und ist doch berechtiget,

ihnen nach dem Gesetze der Stättigkeit ein bestimmtes endliches Verhältniß beyzulegen, so wie zwischen zwey irrationalen Größen ein rationales Verhältniß, und zwischen zwey unmöglichen Größen ein wahres möglich ist; man betrachtet nemlich nicht die Größen, sondern nur ihr Verhältniß.

Zusatz: $d(axy) = aydx + axdy$;
$d(xy + a) = ydx + xdy$;
$d(xyz) = yzdx + xzdy + xydz$.

§. 306.

Lehrsatz:
Das Differential der Potenz einer veränderlichen Größe ist ein Product aus dem Exponenten der veränderlichen Größe, dem unveränderlichen Coefficienten, der veränderlichen Größe mit dem um 1 verminderten Exponenten, und dem Differentiale der einfachen veränderlichen Größe, das ist:

$$d(ax^m) = max^{m-1}dx.$$

Beweis:
Man setze $X = ax^m$, so ist

$$X' = a(x+dx)^m$$
$$= a\left(x^m + mx^{m-1}dx + \frac{m.(m-1)}{1.2}x^{m-2}dx^2 + \right.$$
$$\left. + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}x^{m-3}dx^3 + \ldots\right) \text{(§. 135. 139. 1. Zus.)}$$

mithin

$$X' - X = dX = max^{m-1} dx + \frac{m.(m-1)}{1.2} ax^{m-2} dx^2$$

$$+ \frac{m.(m-1)(m-2)}{1.2.3} ax^{m-3} dx^3 + \ldots.$$

Nun ist dx^2 in Beziehung auf dx, folglich das zweyte Glied der Reihe, und alle folgende Glieder, und selbst ihre Summe in Beziehung auf das erste Glied unendlich klein (§. 302. I. u. II. Zus.), wenn man sie also wegläßt, so erhält man nachstehende unvollständige Gleichung (§. 296. Zus. §. 298. b.):

$$d X = d(ax^m) = max^{m-1} dx.$$

Anmerkung. Das Verfahren nach der Gränzmethode bey diesem Lehrsatze, läßt sich aus §. 305. II. Beweise leicht einsehen; nemlich $\lim. \left(\frac{dX}{dx}\right) = max^{m-1}$ ist eine vollständige Gleichung.

Zusatz: $d(x^2) = 2xdx$;

$d(x^3) = 3x^2 dx$

$d(\sqrt{x}) = d(x^{\frac{1}{2}}) = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} dx = \frac{dx}{2\sqrt{x}}$ (§. 104. III. Zus.)

$d\left(\frac{1}{x^2}\right) = d(x^{-2}) = -2x^{-3} dx = \frac{-2dx}{x^3}$

$d(ax^m y^n) = max^{m-1} y^n dx + nax^m y^{n-1} dy$

§. 307.

Aufgabe:

Die Potenz einer zusammengesetzten veränderlichen Größe zu differentiiren, z. B.

$d(x^3 (a + bx^2)^{\frac{5}{3}})$ zu suchen.

Auf-

Auflösung:

Man setze die zusammengesetzte Größe $= u$, d. i.:

$$a + bx^2 = u, \text{ also } (a + bx^2)^{\frac{5}{3}} = u^{\frac{5}{3}}, \text{ und}$$

$$x^3 (a + b x^2)^{\frac{5}{3}} = x^3 u^{\frac{5}{3}}, \text{ so ist}$$

$$d(x^3 (a + bx^2)^{\frac{5}{3}} = 3 x^2 u^{\frac{5}{3}} dx + \tfrac{5}{3} x^3 u^{\frac{2}{3}} du \text{ (§. 305, 306);}$$

$$= 3x^2 (a + bx^2)^{\frac{5}{3}} dx + \tfrac{5}{3} x^3 (a + bx^2)^{\frac{2}{3}} d(a + bx^2)$$

$$= 3 x^2 (a + b x^2)^{\frac{5}{3}} d x + \tfrac{10}{3} b x^4 (a + b x^2)^{\frac{2}{3}} dx$$

Zusatz: $d(\sqrt{(a^2 - x^2)}) = d(a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} =$

$$= \frac{-x\,dx}{\sqrt{(a^2 - x^2)}}$$

$$d(x^m \sqrt[q]{(a + bx^n)^p}) = d(x^m (a + b x^n)^{\frac{p}{q}})$$

$$= m x^{m-1} (a + bx^n)^{\frac{p}{q}} dx + \frac{nbp}{q} x^{m+n-1} (a + bx^n)^{\frac{p}{q}-1} dx$$

§. 308.

Lehrsatz:

Das Differential eines Bruches erhält man, wenn man vom Producte des Nenners in das Differential des Zählers das Product des Zählers in das Dif=

Differential des Nenners abzieht, und den Rest durch das Quadrat des Nenners dividirt, das ist:

$$d\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{ydx - xdy}{y^2}$$

Beweis:

$$d\left(\frac{x}{y}\right) = d(x\,y^{-1}) \text{ (§. 104. III. Zuf.)}$$

$$= y^{-1}\,dx - xy^{-2}\,dy \text{ (§. 305.)}$$

$$= \frac{dx}{y} - \frac{xdy}{y^2} = \frac{ydx - xdy}{y^2}$$

Diese Gleichung ist ebenfalls eine unvollständige wie jene §. 305.

Zuſatz: $d\left(\frac{ay^3}{x^2}\right) = \frac{3ax^2y^2dy - 2axy^3dx}{x^4}$

$$= \frac{3axy^2dy - 2ay^3dx}{x^3}$$

$$d\left(\frac{(x+a)^3}{(x+b)^2}\right) =$$

$$= \frac{3(x+b)^2(x+a)^2dx - 2(x+a)^3(x+b)dx}{(x+b)^4}$$

$$= \frac{3(x+b)(x+a)^2\,dx - 2(x+a)^3\,dx}{(x+b)^3}$$

$$= \frac{(x+3b-2a)(x+a)^2dx}{(x+b)^3}$$

§. 309.

Lehrsatz:

Das Differential vom natürlichen Logarithmus einer veränderlichen Größe erhält man, wenn man das Differential der veränderlichen Größe durch eben diese Größe dividirt, das ist:

$$d\,(\log.\,\text{nat.}\,x) = \frac{dx}{x}$$

Beweis:

1. Man setze $X = \log.\,\text{nat.}\,x$; also

$X' = \log.\,\text{nat.}\,(x+dx)$; und

$X' - X = dX = \log.\,\text{nat.}\,(x+dx) - \log.\,\text{nat.}\,x$

$= \log.\,\text{nat.}\left(\frac{x+dx}{x}\right)$ (§. 228.); mithin

2. $dX = d\,(\log.\,\text{nat.}\,x) = \log.\,\text{nat.}\left(1+\frac{dx}{x}\right)$

3. Wenn man aber §. 236. I. Zus. a. Statt x die Größe $\frac{dx}{x}$ substituirt, so wird

$$\log.\,\text{nat.}\left(1+\frac{dx}{x}\right) = \frac{dx}{x} - \frac{dx^2}{2x^2} + \frac{dx^3}{3x^3} - \frac{dx^4}{4x^4} + \ldots.$$

4. Da nun in Beziehung auf das erste Glied der Reihe alle folgende unendlich klein sind (§. 302. I. II. Zus.), so wird $\log.\,\text{nat.}\left(1+\frac{dx}{x}\right) = \frac{dx}{x}$ eine unvollständige Gleichung seyn, folglich Nr. 2.

5. $d(\log. nat. x) = \frac{dx}{x}$ ebenfalls eine unvollständige Gleichung.

I. Zusatz: Da x jede zusammengesetzte veränderliche Größe, mithin jede Function von einer oder mehreren veränderlichen Größen darstellen kann, so ist das Differential vom natürlichen Logarithmus einer Function dem Differentiale dieser Function durch die Function dividirt gleich, d. i.

$$d(\log. nat. X) = \frac{dX}{X}$$

II. Zusatz: $d(\log. nat. (a+x)) = \frac{dx}{a+x}$.

$$d(\log. nat. x^n) = \frac{nx^{n-1}dx}{x^n} = \frac{ndx}{x}$$

III. Zusatz: Wenn A den Modul der briggischen oder gemeinen Logarithmen ausdrückt (§. 239); so ist

$d(\log. vulg. x) = d(A \log. nat. x)$ (§. 240.) $= \frac{A\,dx}{x}$

IV. Zusatz: Das Differential einer Function ist dem Producte aus der Function in das Differential ihres natürlichen Logarithmus gleich; denn

$d(\log. nat. X) = \frac{dX}{X}$ I. Zus.; folglich

$dX = X\,d(\log. nat. X)$.

§. 310.

Erklärung:

Potenzen mit veränderlichen Exponenten heißen Exponentialgrößen

§. 311.

Aufgabe:

Eine Exponentialgröße zu differentiiren, wenn zwar der Exponent, nicht aber die Größe selbst veränderlich ist, z. B. d (a^{mx}) suchen.

Auflösung:

$$d(a^{mx}) = a^{mx} d(\text{log. nat. } a^{mx}) \quad (\S. 309. \text{ IV. Zus.})$$

$$= a^{mx} d(mx \text{ log. nat. } a) = ma^{mx} dx \text{ log. nat. } a$$

Zusatz: Wenn b die Basis der natürlichen Logarithmen ausdrückt (§. 238. II. Zus.), mithin log. nat. $b = 1$

so ist $d(b^x) = b^x d(\text{log. nat. } b^x) = b^x d(x \text{ log. nat. } b)$

$$= b^x \, dx \text{ log. nat. } b = b^x dx$$

§. 312.

Aufgabe:

Eine Exponentialgröße zu differentiiren, wenn sowohl der Exponent, als die Größe selbst veränderlich sind, z. B. d (y^x) suchen.

Auf-

Auflösung:

$$d(y^x) = y^x\, d(\log.\text{nat. } y^x) \quad (\S.\ 309.\ \text{IV. Zus.})$$

$$= y^x\, d(x \log.\text{nat. } y) \quad (\S.\ 229.)$$

$$= y^x\, dx \log.\text{nat. } y + x y^x \frac{dy}{y} \quad (\S.\ 305.\ \text{und } 309.)$$

$$= y^x\, dx \log.\text{nat. } y + x y^{x-1} dy$$

§. 313.

Lehrsatz:

Man findet das zweyte Differential eines Productes, wenn man das erste Differential nach §. 305 noch-mahl differentiirt, das ist

$$d^2(xy) = x d^2y + y d^2x + 2\, dxdy = d(ydx + xdy)$$

Beweis:

1. Man nehme $X = xy$, so ist

2. $X' = xy + ydx + xdy + dxdy$ (§. 305.) mithin

3. $X'' = (x + dx + dx')(y + dy + dy')$
$= (x + 2dx + d^2x)(y + 2dy + d^2y)$ (§. 302. c.)

4. Dieses Product, so wie den fernern Calcul stellet die V. Tabelle dar.

5. Da nun in der letzten Reihe, welche den Werth für d^2X angiebt, die letzten drey Glieder in Beziehung auf die drey ersten unendlich klein sind, so ist die unvollständige Gleichung:

$$d^2X = d^2(xy) = y d^2x + x d^2y + 2dxdy.$$

die

die man auch erhält, wenn man $ydx + xdy$ nach §. 305 differentiirt.

I. Zusatz: $d^2(xyz) = d(yzdx + xzdy + xydz)$ (§. 305. Zus.)

$= yzd^2x + 2zdxdy + 2ydxdz + 2xdydx + xzd^2y + xyd^2x$.

II. Zusatz: Wenn die Hilfsgrößen x', x'', x''' u. s. f. der Hauptgröße x so angenommen werden, daß $x' - x = x'' - x' = x''' - x''$; so ist $dx = dx' = dx''$, mithin d^2x und $d^3x = 0$, das heißt dx ist eine beständige Größe, folglich $d^2(xy) = xd^2y + 2dxdy$

$d^2(xyz) = 2zdxdy + 2ydxdz + 2xdydz + xzd^2y + xyd^2z$.

III. Zusatz: Aus ähnlichen Gründen findet man das Differential der dritten Ordnung von einem Producte, wenn man das Differential der zweyten Ordnung differentiirt.

IV. Zusatz: Ueberhaupt erhält man das Differential einer höhern Ordnung von einem Producte, wenn man das Differential der nächst niedern Ordnung, abermal differentiirt, das ist $d^n(xy) = d(d^{n-1}(xy))$.

§. 314.

Lehrsatz:

Man findet das zweyte Differential einer Potenz, wenn man das erste Differential nach §. 306. abermal differentiirt, d. i.:

d^2

$$d^2(x^m) = m\,(m-1)\,x^{m-2}\,dx + max^{m-1}d^2x$$
$$= d\,(mx^{m-1}dx)$$

Beweis.

1. Man setze $X = x^m$, so ist
$X' = X + dX = (x + dx)^m$,
$X'' = X' + dX' = (x + dx + dx')^m = (x + 2dx + d^2x)^m$
(§. 302. c.)

2. Zur leichtern Uebersicht enthält die VI. Tabelle die Reihe von X'' nebst der Fortsetzung des Beweises.

3. In der letzten Reihe, welche den Werth von d^2X angiebt, sind alle Glieder in Beziehung auf die zwey ersten der Reihe unendlich klein, läßt man sie also weg, so erhält man eine unvollständige Gleichung, nemlich

4. $d^2X = d^2(x^m) = mx^{m-1}d^2x + m(m-1)\,x^{m-2}dx^2$;

5. Man bekömt aber eben diesen Werth, wenn man $mx^{m-1}dx$ aufs Neue differentiirt, folglich

6. $d^2(x^m) = d(mx^{m-1}dx)$

I. Zusatz: $d^2\left(\frac{x}{y}\right) = d^2(xy^{-1}) = d\left(\frac{ydx - xdy}{y^2}\right)$

$$= \frac{y^3\,d^2x - xy^2d^2y - 2y^2dxdy + 2xydy^2}{y^4}$$

$$= \frac{y^2\,d^2x - xyd^2y - 2ydxdy + 2x\,dy^2}{y^3}$$

II. Zusatz: $d^2(\log.\text{nat. } x) = d\left(\frac{dx}{x}\right) = \frac{x d^2x - dx^2}{x^2}$

III. Zusatz: Wenn dx eine beständige Größe, mithin $d^2x = 0$ ist, so wird

$$d^2(x^m) = m(m-1)x^{m-2}dx^2$$

$$d^2\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{2xdy^2 - xyd^2y - 2ydxdy}{y^3}$$

$$d^2(\log.\text{nat. } x) = \frac{-dx^2}{x^2}$$

IV. Zusatz: Ueberhaupt erhält man ein Differential einer höhern Ordnung, wenn man das Differential der nächst niedern Ordnung abermal differentiirt; das ist $d^nX = d(d^{n-1}X)$.

V. Zusatz: Wenn $y = x^m$, aber dx unveränderlich bleibt, so erhält man nachstehende vollständige Gleichungen: (§. 298. II. Zus.)

$$\lim\left(\frac{dy}{dx}\right) = m x^{m-1};\ \lim\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = m(m-1)x^{m-2};$$

$$\lim\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right) = m(m-1)(m-2)x^{m-3};$$

$$\lim\left(\frac{d^ny}{dx^n}\right) = m(m-1)\ldots(m-n+1)x^{m-n}$$

VI. Zusatz: Wenn in der Function $y = ax^m + bx^r$ wieder dx unveränderlich ist, so entstehen die vollständigen Gleichungen:

lim.

$$\lim. \left(\frac{dy}{dx}\right) = max^{m-1} + rbx^{r-1}$$

$$\lim. \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = m(m-1)ax^{m-2} + r(r-1)bx^{r-2}$$

$$\lim. \left(\frac{d^3y}{dx^2}\right) = m(m-1)(m-2)ax^{m-3} + r(r-1)$$

$$+ (r-2(bx^{r-3}$$

$$\lim. \left(\frac{d^ny}{dx^n}\right) = m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)ax^{m-n}$$

$$+ r(r-1)\ldots(r-n+1)bx^{r-n}$$

VII. Zusatz: Für $y = x^m(a+x)^n$, wenn dx unveränderlich bleibt, sind vollständige Gleichungen:

$$\lim. \left(\frac{dy}{dx}\right) = mx^{m-1}(a+x)^n + nx^m(a+x)^{n-1}$$

$$\lim. \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = m(m-1)x^{m-2}(a+x)^n + 2mnx^{m-1}$$

$$(a+x)^{n-1} + n(n-1)x^m(a+x)^{n-2}$$

$$\lim. \left(\frac{d^3y}{dx^3}\right) = m(m-1)(m-2)x^{m-3}(a+x)^n +$$

$$+ 3mn(m-1)x^{m-2}(a+x)^{n-1} +$$

$$+ 3mn(n-1)x^{m-1}(a+x)^{n-2} +$$

$$+ n(n-1)(n-2)x^m(a+x)^{n-3}$$

§. 314.

Lehrsatz: Wenn in der Function $y = x^m$, das Differentil dx unveränderlich ist, und wenn man Statt x die beliebige Größe $x + u$, mithin $(x+u)^m = y + v$ setzet, so ist

$$y + v = y + u.\lim.\left(\frac{dy}{dx}\right) + \frac{u^2}{1.2}\lim.\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) + \frac{u^3}{1.2.3}\lim.\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right) + \ldots$$

Beweis:

1. $y + v = (x+u)^m$

$$= x^m + mx^{m-1}u + \frac{m(m-1)}{1.2}x^{m-2}u^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}x^{m-3}u^3 + \ldots$$

$$= x^m + umx^{m-1} + \frac{u^2}{1.2}m(m-1)x^{m-2} + \frac{u^3}{1.2.3}m(m-1)(m-2)x^{m-3} + \ldots$$

2. Substituirt man aus §. 313. V. Zus. für mx^{m-1} das Gränzverhältniß $\lim.\left(\frac{dy}{dx}\right)$ u. s. f.; so wird

$$y + v = y + u.\lim.\left(\frac{dy}{dx}\right) + \frac{u^2}{1.2.}.\lim.\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) + \frac{u^3}{1.2.3}.\lim.\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right) + \ldots$$

Zu-

Zusatz: Wird Statt $x + u$ in der Function $x - u$ genommen, so wird

$$y + v = y - u \cdot \lim. \left(\frac{dy}{dx}\right) + \frac{u^2}{1.2} \lim. \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) - \frac{u^3}{1.2.3} \lim. \left(\frac{d^3y}{dx^3}\right) + \ldots$$

§. 315.

Lehrsatz: Wenn in der Function $y = ax^m + bx^r$ das erste Differential von x unveränderlich ist, und Statt x die Hilfsgröße $x + u$ gesetzet wird, d. i.

$y + v = a(x+u)^m + b(x+u)^r$ genommen wird, so ist

$$y + v = y + u \lim. \left(\frac{dy}{dx}\right) + \frac{u^2}{1.2} \lim. \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) + \frac{u^3}{1.2.3} \lim. \left(\frac{d^3y}{dx^3}\right) + \ldots\ldots$$

Beweis:

$$1.\ a(x+u)^m = ax^m + max^{m-1}u +$$
$$+ \frac{m(m-1)}{1.2} ax^{m-2}u^2 +$$
$$+ \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} ax^{m-3}u^3 + \ldots.$$

2. $b(x+u)^r = bx^r + r\,b\,x^{r-1}\,u +$

$$+ \frac{r(r-1)}{1.2} bx^{r-2}u^2 + \frac{r(r-1)(r-2)}{1.2.3} bx^{r-3}u^3 + \ldots$$

3. $$y + v = \left.\begin{array}{l} ax^m + m\,a\,x^{m-1} \\ + b\,x^r + r\,b\,x^{r-1} \end{array}\right\} u$$

$$\left.\begin{array}{l} + m\,(m-1)\,a\,x^{m-2} \\ + r\,(r-1)\,b\,x^{r-2} \end{array}\right\} \frac{u^2}{1.2}$$

$$\left.\begin{array}{l} + m\,(m-1)\,(m-2)\,a\,x^{m-3} \\ + r\,(r-1)\,(r-2)\,b\,x^{r-3} \end{array}\right\} \frac{u^3}{1.2.3} + \ldots$$

4. Subſtituirt man aus §. 313. VI. Zuſatz für dieſe Coefficienten die Gränzverhältniſſe $\frac{dy}{dx}$ u. ſ. f.; ſo wird

$$y + v = y + u.\lim.\left(\frac{dy}{dx}\right) + \frac{u^2}{1.2}.\lim.\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) +$$

$$+ \frac{u^3}{1.2.3}.\lim.\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right) + \ldots.$$

I. Zuſatz: Für x die Hilfsgröße $x - u$ geſetzet, giebt

$$y + v = y - u.\lim.\left(\frac{dy}{dx}\right) + \frac{u^2}{1.2}.\lim.\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) -$$

$$- \frac{u^3}{1.2.3}.\lim.\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right) + \ldots.$$

II. Zusatz: Es leuchtet ein, daß dieser Lehrsatz noch gelte, wenn $y = ax^m + bx^r + cx^q$, das ist, wenn die Function drey oder mehrere Glieder enthält.

§. 316.

Lehrsatz 1.

Wenn in der Function $y = x^m (a+x)^n$ das erste Differential dx unveränderlich bleibt, und Statt x die Hilfsgröße $x+u$, d. i. $y+v+(x+u)^m \times (a+x+u)^m$ gesetzet wird, so ist

$$y+v = y+u.\lim.\left(\frac{dy}{dx}\right)+\frac{u^2}{1.2}.\lim.\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)+\frac{u^3}{1.2.3}.\lim.\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)+$$

Beweis:

Zu leichterer Uebersicht ist der Beweis in der VII. Tabelle vollkommen entwickelt; setzet man in der zuletzt gefundenen Reihe für die Coefficienten aus §. 313. VII. Zus. die Gränzverhältnisse, so giebt $y+v$ die im Lehrsatze angeführte Reihe.

I. Zusatz: Wenn man Statt x die Hilfsgröße $x-u$ setzet, so wird

$$y+v = y-u.\lim.\left(\frac{dy}{dx}\right)+\frac{u^2}{1.2}.\lim.\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)-\frac{u^3}{1.2.3}.\lim.\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)+\ldots.$$

II. Zusatz. Jede Function von einer veränderlichen Grösse läßt sich auf eine der 3 angeführten §. 314—316 bringen, und Functionen von 2 veränderlichen Grössen lassen sich auf Functionen von einer veränderlichen Größe reduciren (§. 193.), also wird allemal, wenn sich x in $\pm u$ verwandelt, die Function

$$y + v = y \pm u.\lim.\left(\frac{dy}{dx}\right) + \frac{u^2}{1.2}.\lim.\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) \pm$$

$$\pm \frac{u^3}{1.2.3}.\lim.\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right) + \frac{u^4}{1.2.3.4}.\lim.\left(\frac{d^4y}{dx^4}\right) \pm \ldots$$

III. Abschnitt.

Anwendung der Differentialrechnung auf die Bestimmung des größten und kleinsten Werthes einer Function.

§. 317.

Erklärungen:

a. Wenn eine Function von x so beschaffen ist, daß sie bis auf einen gewissen Werth von x immer zunimmt, und nun abnimmt, indem x gleichförmig immer zu- oder abnimmt, so heißt dieser Werth der Function, wo ihre Zunahme vollendet ist, ein **Größtes** (maximum), das ist, ein Werth, der größer als die vorhergehenden und nachfolgenden Werthe ist.

b. Nimmt die Function bis auf einen gewissen Werth von x immer ab, und von da wieder zu, während daß x immer ab- oder zunimmt, so heißt der Werth der Function, wo nemlich ihre Abnahme aufhört, ein **Kleinstes** (minimum), das ist, ein solcher Werth, der kleiner als die vorhergehenden und nachfolgenden Werthe ist.

c. Man dehnet in der Mathematik die Begriffe vom **Größten und Kleinsten** auf solche Werthe der Function aus, die größer, oder kleiner als die zunächst vorhergehenden, und die zunächst nachfolgenden Werthe sind, so daß also eine Function mehrere größte und kleinste Werthe haben kann.

Zusatz: Da in vielförmigen Functionen (§. 186. b.) für jeden Werth von x der Function noch mehrere Werthe zukommen, die von einander unterschieden, also nicht zugleich maxima oder minima seyn können; so schränket sich die Untersuchung eigentlich nur auf einförmige Functionen von x ein.

§. 318.

Lehrsatz:

Wenn y eine einförmige Function von x ist, so giebt es kein Größtes, und kein Kleinstes, wofern nicht $\lim. \left(\frac{dy}{dx}\right) = 0$ ist.

Beweis:

1. Die Function y verwandle sich, wenn dx als beständige Grösse angenommen wird, und x den Werth $x \pm u$ erhält, in $y + v$, so ist §. 316. II. Zus.

$$y + v = y \pm u.\lim.\left(\frac{dy}{dx}\right) + \frac{u^2}{1.2}.\lim.\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) \pm$$

$$\pm \frac{u^3}{1.2.3}.\lim.\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right) + \ldots\ldots$$

2. Man kann nun immer u so klein annehmen, daß $u.\lim.\left(\frac{dy}{dx}\right)$ größer als die Summe aller folgenden Glieder der Reihe wird; soll also

3. y ein Maximum seyn, so muß

$$y > y \pm u.\lim.\left(\frac{dy}{dx}\right) + \frac{u^2}{1.2}.\lim.\left(\frac{d^2y}{d^2x}\right) \pm \ldots$$

seyn; dieses ist aber unmöglich, wenn nicht $u.\lim.\left(\frac{dy}{dx}\right) = 0$ ist; denn offenbar, wenn $u.\lim.\left(\frac{dy}{dx}\right)$ eine positive wirkliche Grösse ist, so ist

$$y < y + u.\lim.\left(\frac{dy}{dx}\right) + \frac{u^2}{1.2}.\lim.\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) + \ldots \text{ (N. 2.)}$$

4. Soll hingegen y ein Kleinstes seyn, so muß

$$y < y \pm u.\lim.\left(\frac{dy}{dx}\right) + \frac{u^2}{1.2}.\lim.\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) \pm \ldots$$

welches ebenfalls unmöglich ist, so lange $u.\lim.\left(\frac{dy}{dx}\right)$ einen endlichen Werth hat, weil offenbar

$$+ y > y - u.\lim.\left(\frac{dy}{dx}\right) + \frac{u^2}{1.2}\lim.\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) - \ldots.$$

5. $u.\lim.\left(\frac{dy}{dx}\right)$ kann nur Null werden, wenn $\lim.\left(\frac{dy}{dx}\right) = 0$ ist, weil u allemal einen bestimmten endlichen Werth erhält.

§. 319.

Lehrsatz:

Eine einförmige Function y von x, in welcher $\lim.\left(\frac{dy}{dx}\right) = 0$ ist, giebt

a. ein Größtes, wenn $\lim.\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$ eine negative Größe,

b. ein Kleinstes, wenn $\lim.\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$ eine positive Größe,

c. keines von beyden, wenn $\lim.\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = 0$ ist, und $\lim.\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)$ noch einen endlichen Werth hat.

Beweis:

1. Wenn $\lim.\left(\frac{dy}{dx}\right)$, mithin auch $u.\lim.\left(\frac{dy}{dx}\right) = 0$ ist, so wird §. 318. Nr. 1.

$$y+v=y+\frac{u^2}{1.2}.\lim.\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)\pm\frac{u^3}{1.2.3}.\lim.\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)+.$$

2. Da man wieder u so klein annehmen kann, daß $\frac{u^2}{1.2}.\lim.\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$ größer, als die Summe aller folgenden Glieder wird, so wird,

3. wenn $\frac{u^2}{1.2}.\lim.\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$ eine negative Größe, mithin $\lim.\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)$ negativ ist; denn u^2 ist allemal positiv (§. 99. u. 100.), offenbar

$$y>y+\frac{u^2}{1.2}.\lim.\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)\pm\frac{u^3}{1.2.3}.\lim.\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)+\ldots\ldots$$

folglich y ein Größtes.

4. Drückt aber $\lim.\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$, also auch $\frac{u^2}{1.2}.\lim.\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$ eine positive Größe aus, so ist

$$y<y+\frac{u^2}{1.2}.\lim.\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)\pm\frac{u^3}{1.2.3}.\lim.\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)+\ldots$$

Folglich y ein Kleinstes.

5. Für $\lim.\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)=0$, verwandelt sich die Reihe Nr. 1. in

$$y+v=y\pm\frac{u^3}{1.2.3}.\lim.\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)+\frac{u^4}{1.2.3.4}.\lim.\left(\frac{d^4y}{dx^4}\right)\pm\ldots\ldots$$

6. Da wieder $\frac{u^3}{1.2.3}.\lim.\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)$ größer als die Summe

me der folgenden Glieder ist, mithin so lange dieses Glied einen endlichen Werth hat, so wird

$$y < y + \frac{u^3}{1.2.3} \lim. \left(\frac{d^3y}{dx^3}\right) + \frac{u^4}{1.2.3.4} \lim. \left(\frac{d^4y}{dx^4}\right) +$$

mithin y kein Größtes; ferner

$$y > y - \frac{u^3}{1.23}. \lim. \left(\frac{d^3y}{dx^3}\right) + \frac{u^4}{1.2.3.4}. \lim. \left(\frac{d^4y}{dx^4}\right) - \ldots\ldots$$

folglich y kein Kleinstes seyn.

I. Zusatz: Auf ähnliche Art läßt sich darthun, daß, wenn $\lim. \left(\frac{dy}{dx}\right)$, $\lim. \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$, $\lim. \left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)$ sämmtlich $= o$ sind, bey einem negativen Werthe von $\lim. \left(\frac{d^4y}{dx^4}\right)$ die Function ein Größtes, und bey einem positiven Werthe dieses Differentialgliedes, ein Kleinstes gebe; endlich überhaupt, daß nur alsdann ein Maximum oder Minimum Statt finden könne, wenn das erste von den Differentialgliedern, welche nicht verschwinden, von gerader Ordnung ist, und daß dieses Glied für das Maximum negativ, und für das Minimum positiv seyn müsse.

II. Zusatz: Da $y^2 = ax - x^2$ eine zweyförmige Function von x ist (§. 186. b); denn $y = \pm\sqrt{(ax - x^2)}$, so kann man sowohl für $y = \sqrt{(ax - x^2)}$, als für den andern Werth $y = -\sqrt{(ax - x^2)} = \sqrt{(x^2 - ax)}$ aus dem I. Zus. bestimmen, ob der Function ein Maximum oder Minimum zukomme.

§. 320.

Aufgabe:

Von einer einförmigen Function von x ihr Maximum und Minimum zu bestimmen.

Auflösung:

1. Man differentiire die Function, und setze das Gränzverhältniß $\lim.\left(\frac{dy}{dx}\right) = 0$ (§. 318.).

2. Aus dieser Gleichung bestimme man den Werth von x,

3. Suche das zweyte Differential der Function, wo aber dx unveränderlich ist, und bestimme den Werth von $\lim.\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$, indem man für x dessen Werth aus Nr. 2. setzet;

4. Wird nun nach der Substitution $\lim.\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$ negativ, so giebt für diesen Werth von x die Function ein Größtes (§. 319. a.)

5. Wird hingegen einer, oder mehrere Werthe von x (wenn x mehrere zukommen können) nach der Substitution die Größe $\lim.\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$ positiv, so ist für jeden dieser Werthe von x die Function ein Kleinstes (§. 319. b);

6. Wird aber nach der Substitution $\lim.\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = 0$, so muß man das dritte Differential der Function neh-

nehmen, und aus lim. $\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right) = 0$ die Werthe von x bestimmen (§. 319, c.)

6. Nun suche man das vierte Differential von der Function, und substituire die Nr. 6. gefundenen Werthe von x; bekömt man lim. $\left(\frac{d^4y}{dx^4}\right)$ als negative Größe, so entspricht der Function ein Maximum, und im Falle lim. $\left(\frac{d^4y}{dx^4}\right)$ negativ wird, so ist für solchen Werth von x die Function ein Minimum (§. 319. I. Zus.)

7. Im Falle aber lim. $\left(\frac{d^4y}{dx^4}\right) = 0$ ist, so läßt sich aus dem bisherigen, und aus §. 319. I. Zus. das fernere Verfahren leicht einsehen.

§. 321.

Aufgaben zur Uebung:

I. Aufgabe:

Man soll eine gegebene Zahl a in zwey solche Theile theilen, daß ihr Product ein Maximum ist.

Auflösung:

Man bezeichne den einen Theil mit x, also den andern mit $a - x$; das Product mit y; so ist

$y = ax - x^2$; $dy = adx - 2xdx$; lim. $\left(\frac{dy}{dx}\right) =$

$= a - 2x = 0$

also

also $x = \frac{1}{2} a$;

ferner $d^2y = -2dx^2$, also lim. $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = -2$,

folglich, wenn man Statt x die Größe $\frac{1}{2}$ a setzet, das ist, wenn man die Zahl a in zwey gleiche Theile theilet, so wird die Function ein Maximum, d. i. $\frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{4}a^2 = \frac{1}{2}a^2 = \text{Max.}$

für $a = 10$; ist $5 \times 5 = 25$ ein Größtes.

II. Aufgabe:

Anzugeben ob, und bey was für einem Werthe von x die Function $x^2 + 3x + 2$ ein Max. oder Min. gebe.

Auflösung:

Man setze $y = x^2 + 3x + 2$, also $dy = 2xdx + 3dx$,

lim. $\left(\frac{dy}{dx}\right) = 2x + 3 = 0$; $x = -\frac{3}{2}$.

Ferner $d^2y = 2dx^2$; also lim. $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = 2$, und die Function ist für $x = -\frac{3}{2}$ ein Minimum, das ist $\frac{9}{4} - \frac{9}{2} + 2 = \frac{9}{4} - \frac{18}{4} + \frac{8}{4} = -\frac{1}{4} = \text{Min.}$

III. Aufgabe:

Die Fälle anzugeben, in welchen die Function von $x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x + 12$ ein Größtes, oder Kleinstes wird.

Auflösung:

1. Man setze $y = x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x + 12$, so ist $dy = 4x^3 dx - 24x^2 dx + 44 xdx - 24 dx$;

und

und lim. $\left(\frac{dy}{dx}\right) = 4x^3 - 24x^2 + 44x - 24 = 0$,

mithin

2. $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$.

Man erhält hier für x die 3 Werthe (§. 174.)

I $x = 1$; II $x = 2$; III $x = 3$.

3. $d^2y = 12x^2dx^2 - 48xdx^2 + 44dx^2$, also

lim. $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = 12x^2 - 48x + 44$

4. Substituirt man nacheinander die für x gefundenen Werthe, so ist

I. für $x = 1$, lim. $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = 12 - 48 + 44 = 8$.

folglich die Function für $x = 1$, d. i.

$1 - 8 + 22 - 24 + 12 = 3 =$ Min.

II. für $x = 2$, lim. $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = 12 \times 4 - 48 \times 2 + 44$

$= -4$

mithin die Function ein Größtes, das ist

$16 - 64 + 88 - 48 + 12 = 4 =$ Max.

III. Für $x = 3$ wird lim. $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = 12 \times 9 - 48 \times 3$

$+ 44 = 8$

folglich giebt die Function wieder ein Kleinstes, das ist: $81 - 216 + 198 - 72 + 12 = 3 =$ Min.

IV. Abschnitt.

Integralrechnung.

§. 322.

Erklärungen:

a. Eine Größe integriren heißt aus einem gegebenen Differential die Größe selbst finden, durch deren Differentiirung die gegebene Differentialgröße entstanden ist. Man setzet dem Differential, welches integriret werden soll, das Zeichen ($\int$) vor; so z. B. heißt $\int a\,dx$, man soll $a\,dx$ integriren.

b. Die Wissenschaft gegebene Differentiale zu integriren, heißt die Integralrechnung.

I. Zusatz: Da eine veränderliche Größe einerley Differential behält, wenn man beständige Größe zu ihr addirt, oder davon subtrahirt, d. i. x, $x + a$, und $x - a$ hat dx zum Differential, so zeiget man diese beständige Größe durch $+ C$ im Integral an, z. B. $\int dx = x + C$, wo aber erst durch die Bedingungen der Aufgabe C bestimmt werden kann.

II. Zusatz: Da die Differentialgleichungen und Proportionen größten Theils unvollständig sind (§. 305. 306 ꝛc.), so erhält man auch aus ihnen durch Integration nur unvollständige Gleichungen und Proportionen, die aber bey der Anwendung, wo die Hilfsgrößen eliminirt werden, in vollständige übergehen (§. 301.)

§. 323.

Erklärungen:

a. Die in einem Differential mit dem Zeichen + oder — verbundenen Grösen heißen **Theile** oder **Glieder.**

b. Differentiale, die nur ein Glied enthalten, heißen **eintheilige, einnamige** Differentiale, z. B. dx, adx, $bx^n dx$; $\frac{2xdx}{x^2}$ u. s. f.; die hingegen aus mehrern Gliedern bestehen, heißen **mehrtheilige, mehrnamige** Differentiale, z. B. $ax^3dx + \frac{bx^2dx}{c}$; oder $\frac{adx}{a+x}$ u. s. w.

§. 324.

Aufgabe:

Das Integral eines eintheiligen Differentials zu suchen, wenn die veränderliche Größe weder den Exponenten — 1, noch im Nenner den Exponenten + 1 enthält.

Auflösung:

1. Man vermehre im gegebenen Differentiale den Exponenten der veränderlichen Größe um 1,

2. dividire solches mit dem Producte aus dem Differential der veränderlichen Größe in diesen um 1 vermehrten Exponenten.

3. Setze endlich diesem Integrale die beständige Größe oder + C bey.

Beweis:

Offenbar läßt sich jedes eintheilige Differential durch $ax^n dx$ ausdrücken, wo n jede Zahl, nur nicht -1 nach den Bedingungen der Aufgabe seyn kann;

Nun ist aber $\int ax^n dx = \frac{ax^{n+1} dx}{(n+1)dx} = \frac{ax^{n+1}}{n+1}$, denn wenn man letzteres differentiirt (§. 306.), so erhält man $ax^n dx$;

Endlich muß noch C addirt werden (§. 322. I. Zus.);

folglich $\int ax^n dx = \frac{ax^{n+1} dx}{(n+1)\,dx} + C.$

Zusatz:

a. $\int 2x dx = \frac{2x^2 dx}{2dx} + C = x^2 + C$

b. $\int a dx = \frac{axdx}{dx} + C = ax + C.$

c. $\int ax^{\frac{2}{3}}\, dx = \frac{ax^{\frac{2}{3}+1} dx}{(\frac{2}{3}+1)dx} + C = \frac{3}{5} ax^{\frac{5}{3}} + C.$

d. $\int \frac{a dx}{x^3} = \int ax^{-3} dx = \frac{ax^{-2} dx}{-2\,dx} + C = -\frac{1}{2} ax^{-2} + C$

$= -\frac{a}{2x^2} + C.$

e. $\int a\, dx \sqrt[3]{x^2} = \int ax^{\frac{2}{3}} dx = \frac{3}{5} ax^{\frac{5}{3}} + C.$

§. 325.

Aufgabe:

Differentiale zu integriren, in welchen die veränderliche Größe den Exponenten — 1, oder der veränderliche ein- oder mehrtheilige Nenner den Exponenten + 1 bey sich hat.

Auflösung:

1. Man suche dem Differentiale so eine Form zu geben, wenn es nicht schon selbe hat, daß der Zähler das Differential des Nenners enthält, geht dieses an, so ist

2. Das Integral des gegebenen Differentials der natürliche Logarithmus des Nenners nebst einer beständigen Größe (§. 309. I. Zus. u. §. 322. I. Zus.).

3. Läßt sich aber obige Verwandlung nicht bewirken, so werden später Integrationsmethoden angegeben werden, die aber nicht für alle Fälle zureichend sind, so wie man überhaupt in der Integralrechnung noch nicht im Stande ist, alle gegebene Differentiale zu integriren.

Zusatz:

a. $\int \frac{dx}{a+x} = \text{log. nat. } (a+x) + C$

b. $\int \frac{2xdx}{a^2+x^2} = \text{log. nat. } (a^2+x^2) + C$

c. $\int \frac{bx^2dx}{a^3+x^3} = \frac{b}{3}\int \frac{3x^2dx}{a^3+x^3} = \frac{b}{3}\text{log.nat.}(a^3+x^3)+C.$

d.

$$d.\int\frac{dx}{a-x}=-1\int\frac{-dx}{a-x}=-\log.\text{nat.}(a-x)+C$$

$$=\log.\text{nat. }1-\log.\text{nat.}(a-x)+C=$$

$$=\log.\text{nat.}\left(\frac{1}{a-x}\right)+C.$$

§. 326.

Aufgabe:

Eine mehrtheilige Größe zu integriren, die nicht aus zusammengesetzten Dignitäten besteht.

Auflösung:

1. Man integrire jedes einzelne Glied nach §. 324, und wo dieses nicht angeht, nach §. 325.,
2. addire am Ende die beständige Größe C.

Beweis:

So wie das Differential einer mehrtheiligen Größe aus der Summe der Differentiale besteht (§. 304.); so muß umgekehrt die Summe der einzelnen Integrale das Integral vom Ganzen geben.

Zusatz:

a. $\int(ax^3dx+\frac{bx^2dx}{c}+edx)=\frac{ax^4}{4}+\frac{bx^3}{3c}+ex+C.$

b. $\int\left(ax^3\,dx+bx^{-4}\,dx+\frac{2xdx}{a^2+x^2}\right)=\frac{ax^4}{4}-\frac{bx^{-3}}{3}$

$$=\log.\text{nat.}(a^2+x^2)+C.$$

§. 327.

§. 327.

Aufgabe:

Zusammengesetzte, das ist, mehrtheilige Potenzen zu integriren, wenn der Exponent der zusammengesetzten Potenz eine ganz positive Zahl ist.

Auflösung:

1. Man erhebe die Größe zur Dignität, welche der Exponent angiebt,
2. integrire wieder nach §. 324 oder 325 alle einzelne Glieder,
3. addire die beständige Größe C.

Beweis:

Wenn der Exponent eine ganze Zahl ist, so lassen sich alle Glieder vollständig darstellen (§. 135.), mithin durch ihre Integration das Integral vom Ganzen angeben (§. 326.).

Zusatz:

a. $\int gx^3dx\,(a+bx^2)^2 = \int gx^3dx(a^2+2abx^2+b^2x^4)$

$= \int (a^2gx^3dx+2abgx^5dx+b^2gx^7dx)$

$= \frac{a^2gx^4}{4} + \frac{abgx^6}{3} + \frac{b^2gx^8}{8} + C.$

b. $\int \frac{adx}{x^3}(a+bx^2)^2 = \int ax^{-3}dx(a^2+2abx^2+b^2x^4)$

$= \int (a^3x^{-3}dx+2a^2bx^{-1}dx+ab^2xdx)$

$-\frac{a^3}{2x^2} + 2\,a^2b \log.\,nat.\,x + \frac{1}{2}\,ab^2x^2 + C.$

§. 328.

Aufgabe:

Ein Differential mit zusammengesetzten Potenzen zu integriren, der Exponent davon mag eine ganze oder gebrochene, positive oder negative Zahl seyn, wenn die Größe, in welche die zusammengesetzte Dignität multiplicirt ist, das Differential derselben enthält.

Auflösung:

1. Wenn der Exponent der zusammengesetzten Größe nicht $= -1$ ist, so behandle man die ganze eingeschlossene Größe als eine einfache veränderliche Größe, und bestimme das Integral aus §. 324.

2. Wenn hingegen der Exponent der zusammiengesetzten Größe $= -1$ ist, so suche man das Integral aus §. 325.

Beweis:

Wenn man die zusammengesetzte Größe $= X$ setzet, so stellet $dX\,(X)^m$ den ersten, und $X^{-1}dX = \frac{dX}{X}$ den zweyten Fall allgemein dar;

Nun ist $\int dX\,(X)^m = \frac{X^{m+1}}{m+1} + C$ (§. 324.),

und $\int \frac{dX}{X} = \log.\ nat.\ X + C$ (§. 325.)

Zusatz:

a. $\int (adx+2xdx)(ax+x^2)^{-\frac{1}{2}} =$

$$= \frac{(adx+2xdx)\,(ax+x^2)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}(adx+2xdx)} + C$$

$$= 2\sqrt{(ax+x^2)} + C.$$

b. $\int (adx+2xdx)(ax+x^2)^{-1} =$ log.nat.$(ax+x^2)+C$.

§. 329.

Aufgabe:

Wenn in einem Differential mit einer zweytheiligen Dignität jedes Glied die veränderliche Größe enthält, aus einem Gliede die veränderliche Größe wegzuschaffen, z. B. aus

$$\frac{a^2dx}{x\sqrt{(ax+x^2)}} = a^2\,x^{-1}dx(ax+x^2)^{-\frac{1}{2}}$$

Auflösung:

1. Man dividire die beyden Glieder des Binomiums mit jener veränderlichen Größe, die man aus einem Gliede wegschaffen will;

2. Eben diese Größe erhebe man zur Dignität des Binomiums, und multiplicire damit die Größe außer dem Binomio; d. i.

I. $a^2x^{-1}dx\,(ax+x^2)^{-\frac{1}{2}} = a^2x^{-\frac{3}{2}}dx\,(a+x)^{-\frac{1}{2}}$;

Eben so ist

II. $a^2x^{-1}\,dx(ax+x^2)^{-\frac{1}{2}} = a^2\,x^{-2}dx(ax^{-1}+1)^{-\frac{1}{2}}$

Beweis:

I. $ax + x^2 = x(a+x)$,

$(ax+x^2)^{-\frac{1}{2}} = x^{-\frac{1}{2}}(a+x)^{-\frac{1}{2}}$; folglich

$a^2 x^{-1}\, dx\,(ax+x^2)^{-\frac{1}{2}} = a^2\, x^{-\frac{3}{2}} dx\,(a+x)^{-\frac{1}{2}}$

wo die veränderliche Größe aus dem ersten Gliede eliminirt ist.

II. $ax+x^2 = x^2\left(\frac{a}{x}+1\right) = x^2\,(a\,x^{-1}+1)$

$(ax+x^2)^{-\frac{1}{2}} = x^{-1}\,(ax^{-1}+1)^{-\frac{1}{2}}$

$a^2 x^{-1} dx\,(ax+x^2)^{-\frac{1}{2}} = a^2\, x^{-2} dx (ax^{-1}+1)^{-\frac{1}{2}}$

wo aus dem zweyten Gliede die veränderliche Größe weggeschaffet ist.

§. 330.

Aufgabe:

Die veränderliche Größe aus einem Gliede in das andere Glied einer zweytheiligen Dignität bey einem gegebenen Differential zu schaffen.

Auflösung:

1. Man dividire beyde Glieder des Binomiums mit der veränderlichen Größe;

2. Erhebe solche zur Dignität des Binomiums, und multiplicire damit die Größe außer dem Binomio.

So ist z. B.

$x^{-\frac{3}{2}} dx\,(a^2 x^{\frac{1}{2}}-2)^{-2} = x^{-\frac{5}{2}} dx\,(a^2 - 2x^{-\frac{1}{2}})^{-2}$

Beweis:

$$a^2 x^{\frac{1}{2}} - 2 = x^{\frac{1}{2}}(a^2 - 2x^{-\frac{1}{2}})$$

$$(a^2 x^{\frac{1}{2}} - 2)^{-2} = x^{-1} (a^2 - 2x^{-\frac{1}{2}})^{-2}$$

$$x^{-\frac{3}{2}} dx (a^2 x^{\frac{1}{2}} - 2)^{-2} = x^{-\frac{5}{2}} dx (a^2 - 2x^{-\frac{1}{2}})^{-2}$$

§. 331.

Lehrsatz:

$gx^n dx (a + bx^m)^p$ läßt sich integriren, wenn der um 1 vermehrte Exponent n der veränderlichen Größe aufser dem Binomio, durch den Exponenten m eben dieser veränderlichen Größe im Binomio dividirt, eine positive ganze Zahl zum Quotienten giebt, d. i. wenn $\frac{n+1}{m}$ eine positive ganze Zahl ist, es mag p jede beliebige Zahl seyn.

Beweis:

1. Man setze $a + bx^m = z$, also $(a + bx^m)^p = z^p$, u.

2. $x = \frac{(z-a)^{\frac{1}{m}}}{b^{\frac{1}{m}}}$; $dx = \frac{dz}{mb^{\frac{1}{m}}} (z-a)^{\frac{1}{m}-1}$, und

3. $x^n = \frac{(z-a)^{\frac{n}{m}}}{b^{\frac{n}{m}}}$, folglich

4. $gx^n dx(a+bx^m)^p = g.\frac{(z-a)^{\frac{n}{m}}}{b^m} \cdot \frac{dz}{mb^m}(z-a)^{\frac{1}{m}-1} \times z^p$

$$= \frac{gz^p dz}{mb^m}(z-a)^{\frac{n+1}{m}-1}$$

5. Ist nun $\frac{n+1}{m}$ eine ganze positive Zahl, so ist auch $\frac{n+1}{m} - 1$ entweder eine ganze positive Zahl, oder Null, im Falle $\frac{n+1}{m} = 1$ ist, allemal aber läßt sich das Integral aus §. 327, oder für $\frac{n+1}{m} - 1 = 0$ aus §. 324 und §. 325 finden.

§. 332.

Aufgabe:

$gx^3 dx\,(a+bx^2)^{\frac{4}{5}}$ **zu integriren.**

Auflösung:

1. Da $\frac{3+1}{2} = 2$ eine positive ganze Zahl ist, so läßt sich das Integral aus §. 331 bestimmen.

2. Man setze $a + bx^2 = z$; ferner $n = 3$; $m = 2$; $p = \frac{4}{5}$; und $\frac{n+1}{m} - 1 = 1$; so ist (§. 331. Nr. 4.)

$$\frac{4}{5}$$

3. $gx^3dx(a+bx^2)^{\frac{4}{5}} = \frac{gz^{\frac{4}{5}}dz}{2b^2}(z-a)$; folglich

$$\frac{9}{5} \qquad \frac{4}{5}$$

4. $\int gx^3dx(a+bx^2)^{\frac{4}{5}} \int \left(\frac{gz^{\frac{9}{5}}dz}{2b^2} - \frac{agz^{\frac{4}{5}}dz}{2b^2}\right)$

$$= \frac{5gz^{\frac{14}{5}}}{28b^2} - \frac{5agz^{\frac{9}{5}}}{18b^2} + C$$

5. Substituirt man wieder für Z dessen Werth Nr. 2., so wird

$$\int gx^3dx(a+bx^2)^{\frac{4}{5}} = \frac{5g}{28b^2}(a+bx^2)^{\frac{14}{5}} - \frac{5ag}{18b^2}(a+bx^2)^{\frac{9}{5}} + C.$$

§. 333.

Aufgabe:

Das Integral von $gx^8dx(a+bx^3)^{-\frac{2}{3}}$ zu suchen.

Auflösung:

1. Offenbar ist das gegebene Differential unter der Formel §. 331. enthalten, und da $\frac{8+1}{3} = 3$ eine positive-ganze Zahl ist, so läßt es sich integriren.

2. Man setze $(a+bx^8)=z$, so ist ferner in der Formel §. 331. Nr. 4.; $n=8$; $m=3$; $\frac{n+1}{m}=3$; $\frac{n+1}{m}-1=2$; $p=-\frac{2}{3}$; folglich

$$3.\ gx^8dx(a+bx^3)^{-\frac{2}{3}}=\frac{gz^{-\frac{2}{3}}dz}{3b^3}(z-a)^2$$

$$=\frac{g}{3b^3}z^{-\frac{2}{3}}dz(z^2-2az+a^2)=\frac{g}{3b^3}(z^{\frac{4}{3}}dz-2az^{\frac{1}{3}}dz+a^2z^{-\frac{2}{3}}dz)$$

$$4.\ \int gx^8dx(a+bx^3)^{-\frac{2}{3}}=\frac{g}{3b^3}(\tfrac{3}{7}z^{\frac{7}{3}}-\tfrac{3}{2}az^{\frac{4}{3}}+3a^2z^{\frac{1}{3}})+C$$

$$=\frac{g}{3b^3}z^{\frac{1}{3}}(\tfrac{3}{7}z^2-\tfrac{3}{2}az+3a^2)+C$$

5. Substituiret man Statt z dessen Werth $a+bx^3$, so wird

$$\int gx^8dx(a+bx^3)^{-\frac{2}{3}}$$

$$=\frac{g}{3b^3}\Big\{(a+bx^3)^{\frac{1}{3}}(\tfrac{3}{7}(a+bx^3)^2-\tfrac{3}{2}a(a+bx^3)+3a^2\Big\}+C.$$

§. 334.

Aufgabe.

$\frac{a^2dx}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}=a^2dx(a^2+x^2)^{-\frac{3}{2}}$ zu integriren.

Auf-

Auflösung:

1. Offenbar ist das gegebene Differential von der Form §. 331; da aber $\frac{0+1}{1}$ keine ganze Zahl ist, so schaffe man x^2 in das erste Glied (§. 330.), so wird

2. $a^2x^0dx(a^2+x^2)^{-\frac{3}{2}} = a^2x^{-3}dx(a^2x^{-2}+1)^{-\frac{3}{2}}$

3. Da nun $\frac{-3+1}{-2} = 1$ eine positive ganze Zahl ist, so läßt sich das gegebene Differential integriren;

4. Man setze also in §. 331. Nro. 4. $z = a^2x^{-2}+1$; ferner wird $n = -3$; $m = -2$; $\frac{n+1}{m} = 1$; $\frac{n+1}{m} - 1 = 0$; $p = -\frac{3}{2}$; $g = a^2$; $b = a^2$; $a = 1$; folglich

$$4.\ a^2x^{-3}dx(a^2x^{-2}+1)^{-\frac{3}{2}} = \frac{a^2z^{-\frac{3}{2}}dz}{-2a^2}(z-a)^0 = -\frac{1}{2}z^{-\frac{3}{2}}dz$$

$$5.\ \int a^2x^{-3}dx(a^2x^{-2}+1)^{-\frac{3}{2}} = \frac{-\frac{1}{2}z^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} + C = \frac{1}{\sqrt{z}} + C$$

6. Substituirt man aus Nro. 4. statt z dessen Werth, so ist

$$\int a^2x^{-3}dx(a^2x^{-2}+1)^{-\frac{3}{2}} = \int \frac{a^2dx}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{(a^2x^{-2}+1)}} + C$$

$$= \frac{x}{\sqrt{(a^2+x^2)}} + C.$$

§. 335.

Aufgabe:

$\frac{a^2 dx}{x\sqrt{(ax+x^2)}} = a^2 x^{-1} dx (ax+x^2)^{-\frac{1}{2}}$ zu integriren.

Auflösung:

1. Da sich dieses Differential weder aus §. 327, noch aus §. 328 integriren läßt, und

2. die Form vom Differentiale §. 331 nicht hat, indem in beyden Theilen des Binomiums die veränderliche Größe enthalten ist, man schaffe daher solche aus einem Gliede weg (§. 329.), so wird

3. $a^2 x^{-1} dx (ax+x^2)^{-\frac{1}{2}} = a^2 x^{-\frac{3}{2}} dx (a+x)^{-\frac{1}{2}}$

4. Nun ist zwar das Differential von der Form §. 331. aber weil $\frac{-\frac{3}{2}+1}{1}$ keine ganze positive Zahl ist, so schaffe man die veränderliche Größe im Binomio aus dem zweyten in das erste Glied (§. 330.), so ist

5. $a^2 x^{-\frac{3}{2}} dx (a+x)^{-\frac{1}{2}} = a^2 x^{-2} dx (ax^{-1}+1)^{-\frac{1}{2}}$

6. Im letztern Differential ist $\frac{-2+1}{-1} = 1$, folglich läßt sich das Integral davon nach §. 331. Nro. 4. angeben.

7. Man setze $z = ax^{-1}+1$; $n = -2$; $m = -1$; $\frac{n+1}{m} = 1$; $\frac{n+1}{m} - 1 = 0$; $p = -\frac{1}{2}$; $g = a^2$; $b = a$; $a = 1$; folglich

8.

8. $a^2x^{-2}dx(ax^{-1}+1)^{-\frac{1}{2}} = \frac{a^2 z^{-\frac{1}{2}} dz}{-a}(z-1)^0 =$

$= -az^{-\frac{1}{2}} dz$

9. $\int a^2x^{-2}dx(ax^{-1}+1)^{-\frac{1}{2}} = -2az^{\frac{1}{2}} + C.$

10. Substituirt man für z dessen Werth, so ist

$$\int a^2x^{-2}dx(ax^{-1}+1)^{-\frac{1}{2}} = \int \frac{a^2dx}{x\sqrt{(ax+x^2)}} =$$

$$= -2a\sqrt{(ax^{-1}+1)} + C.$$

§. 336.

Aufgabe:

$\frac{\frac{1}{2}dx}{\sqrt{(x-x^2)}} = \frac{1}{2}dx\,(x-x^2)^{-\frac{1}{2}}$ zu integriren.

Auflösung:

1. Das gegebenene Differential läßt sich weder aus §. 327 noch aus §. 328. integriren.

2. Man bringe solches auf die Form §. 331, das ist, eliminire die veränderliche Größe aus einem Gliede des Binomiums nach §. 329, nemlich

3. $\frac{1}{2}dx\,(x-x^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\,dx(1-x)^{-\frac{1}{2}}$

4. Da aber $\frac{-\frac{1}{2}+1}{1}$ keine ganze positive Zahl ist, so bringe man nach §. 330. die veränderliche Größe aus dem zweyten in das erste Glied des Binomiums, das ist:

5. $\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}dx\,(1-x)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}x^{-1}dx(\,x^{-1}-1)^{-\frac{1}{2}}$; wo aber wieder $\frac{-1+1}{-1}$ keine ganze positive Zahl ist,

mithin das Differential nach §. 331 nicht integrirt werden kann.

6. Man muß also solches durch Annäherung integriren, das ist, man muß das Differential in eine convergirende Reihe einfacheiliger Größen auflösen, die Integrale der Glieder bestimmen, und so viele davon nehmen, als es die Umstände der Aufgabe erfodern.

7. Nun ist $(1-x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + \frac{5}{16}x^3 + \ldots\ldots$ (§. 139. III. Zus.); mithin

8. $\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}dx(1-x)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}dx(1 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + \frac{5}{16}x^3 + \ldots)$

$= \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}dx + \frac{1}{4}x^{\frac{1}{2}}dx + \frac{3}{16}x^{\frac{3}{2}}dx + \frac{5}{32}x^{\frac{5}{2}}dx + \ldots\ldots$

9. $\int \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}dx(1-x)^{-\frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{6}x^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{40}x^{\frac{5}{2}} + \frac{5}{112}x^{\frac{7}{2}} + \ldots$

Zusatz: Nach dieser Methode lassen sich alle vieltheilige Differentiale von zusammengesetzten Potenzen, im Falle dieses aus §. 327, 328, 331 nicht angeht, durch Annäherung integriren; da aber x nicht allemal so beschaffen ist, daß die Reihe convergiret, oder, wenn sie auch convergiret, noch immer eine beträchtliche Anzahl der Glieder (außer die Reihe nähme sehr schnell ab), erfordert wird, so suchet man die Integrale von solchen Größen aus andern schon bekannten herzuleiten.

§. 337.

Lehrsatz:

$$\int \frac{bdx}{\sqrt{(x^2 \pm a^2)}} = \int bx^0\, dx\, (x^2 \pm a^2)^{-\frac{1}{2}} = b.\ \log.\ nat.\ (x + \sqrt{(x^2 \pm a^2)}) + C.$$

Beweis:

1. Man setze $\sqrt{(x^2 \pm a^2)} = z - x$; also $x^2 \pm a^2 = z^2 - 2zx + x^2$, und $2zx = z^2 \mp a^2$; $x = \frac{1}{2}z \mp \frac{1}{2}a^2 z^{-1}$;

   $dx = \frac{1}{2}dx \pm \frac{1}{2}a^2 z^{-2}dz$; $z - x = \frac{1}{2}z \pm \frac{1}{2}a^2 z^{-1} = \sqrt{(x^2 \pm a^2)}$ mithin

2. $$\int \frac{bdx}{\sqrt{(x^2 \pm a^2)}} = \int \left(\frac{b(\frac{1}{2}dz \pm \frac{1}{2}a^2 z^{-2}dz)}{\frac{1}{2}z \pm \frac{1}{2}a^2 z^{-1}}\right)$$

$$= \int \left(\frac{b(z^2 dz \pm a^2 dz)}{z^3 \pm a^2 z}\right) = \int \frac{bdz(z^2 \pm a^2)}{z(z^2 \pm a^2)} = \int \frac{bdz}{z}$$

$= b \log.\ nat.\ Z + C$ (§. 325.)

3. Substituirt man für z dessen Werth, so ist

$$\int \frac{bdx}{\sqrt{(x^2 \pm a^2)}} = b.\log.\,nat.\,(x + \sqrt{(x^2 \pm a^2)}) + C.$$

§. 338.

Lehrsatz:

$$\int b\,dx\sqrt{(x^2 \pm a^2)} = \int b\,x^0\,dx\,(x^2 \pm a^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \tfrac{1}{2}bx\sqrt{(x^2 \pm a^2)} \pm \tfrac{1}{2}a^2 b.\log.\,nat.\,(x + \sqrt{(x^2 \pm a^2)}) + C.$$

Beweis:

1. Offenbar ist $\int bdx(x^2 \pm a^2)^{\frac{1}{2}} = \int (\frac{1}{2}bdx(x^2 \pm a^2)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}bdx(x^2 \pm a^2)^{\frac{1}{2}}$

$$= \int \left(\frac{\frac{1}{2}bdx(x^2 \pm a^2)^{\frac{1}{2}} + \frac{\frac{1}{2}bdx(x^2 \pm a^2)}{(x^2 \pm a^2)^{\frac{1}{2}}}}{}\right)$$

$= \int (\frac{1}{2}bdx(x^2 \pm a^2)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}bx^2dx(x^2 \pm a^2)^{-\frac{1}{2}} \pm$

$\pm \frac{1}{2}a^2bdx(x^2 \pm a^2)^{-\frac{1}{2}})$

2. Nun ist $\int (\frac{1}{2}bdx(x^2 \pm a^2)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}bx^2dx(x^2 \pm a^2)^{-\frac{1}{2}})$

$= \frac{1}{2}bx\sqrt{(x^2 \pm a^2)}$;

denn wenn man solche differentiirt, so giebt sie die beyden Differentiale.

3. $\int \pm \frac{1}{2}a^2bdx(x^2 \pm a^2)^{-\frac{1}{2}} = \pm \frac{1}{2}a^2b$ log nat. $(x + \sqrt{(x^2 \pm a^2)})$ (§. 337.) folglich

4. $\int bdx\sqrt{(x^2 \pm a^2)} = \frac{1}{2}bx\sqrt{(x^2 \pm a^2)} \pm \frac{1}{2}a^2$ b. log. nat. $(x + \sqrt{(x^2 \pm a^2)}) + C$.

§. 339.

Lehrsatz:

$$\int \frac{bdx}{\sqrt{(x^2 \pm ax)}} = \int bx^{-\frac{1}{2}}dx(x \pm a)^{-\frac{1}{2}} = \int bx^{-1}dx$$

$$(1 \pm ax^{-1})^{-\frac{1}{2}}$$

$= b$ log. nat. $(x \pm \frac{1}{2}a + \sqrt{x^2 \pm ax})) + C$

Beweis:

1. Man setze $x = z - \frac{1}{2}a$; $dx = dz$;

$x^2 = z^2 - az + \frac{1}{4}a^2$; $ax = az - \frac{1}{2}a^2$; mithin $\sqrt{(x^2+ax)} = \sqrt{(z^2 - \frac{1}{4}a^2)}$; folglich

2. $\int \frac{bdx}{\sqrt{(x^2+ax)}} = \int \frac{bdz}{\sqrt{(z^2-\frac{1}{4}a^2)}} = b$ log. nat. $(z+\sqrt{(z^2-\frac{1}{4}a^2)})$ (§. 337.); restituirt man wieder den Werth von z, so wird

3. $\int \frac{bdx}{\sqrt{(x^2+ax)}} = b.$ log. nat. $(x+\frac{1}{2}a+\sqrt{(x^2+ax)}) + C.$

5. Nun setze man auf's neue $x = z + \frac{1}{2}a$; $dx = dz$, $x^2 = z^2 + az + \frac{1}{4}a^2$; $ax = az + \frac{1}{2}a^2$; also $x^2 - ax = z^2 - \frac{1}{4}a^2$, mithin $\sqrt{(x^2-ax)} = \sqrt{(z^2-\frac{1}{4}a^2)}$.

6. $\int \frac{bdx}{\sqrt{(x^2-ax)}} = \int \frac{bdz}{\sqrt{(z^2-\frac{1}{4}a^2)}} = b$ log. nat. $(z+\sqrt{(z^2-\frac{1}{4}a^2)}) + C$. (§. 337.); folglich der Werth für z gesetzet.

7. $\int \frac{bdx}{\sqrt{(x^2-ax)}} = b$ log. nat. $(x-\frac{1}{2}a+\sqrt{(x^2-ax)}) + C$

8. Aus Nro. 3 und 7 wird endlich

$$\int \frac{bdx}{\sqrt{(x^2 \pm ax)}} = b.\text{log.nat.}(x \pm \tfrac{1}{2}a + \sqrt{(a^2 \pm ax)}) + C$$

§. 340.

Lehrsatz:

$$\int bdx\sqrt{(x^2 \pm ax)} = \int bx^{\frac{1}{2}}dx(x \pm a)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \int bxdx(1 \pm ax^{-1})^{\frac{1}{2}}$$

$$= \tfrac{1}{4}b(2x \pm a)\sqrt{(x^2 \pm ax)} - \tfrac{1}{8}a^2 b.\ \text{log. nat.}$$

$$(x \pm \tfrac{1}{2}a + \sqrt{(x^2 \pm ax)}) + C.$$

Be-

Beweis:

1. Man setze $x = x - \frac{1}{2}a$; also $dx = dz$;
$x^2 = z^2 - az + \frac{1}{4}a^2$; $ax = az - \frac{1}{2}a^2$, mithin
$x^2 + ax = z^2 - \frac{1}{4}a^2$, und $\sqrt{(x^2+ax)} = \sqrt{(z^2 - \frac{1}{4}a^2)}$.
folglich

2. $\int b\,dx\sqrt{(x^2+ax)} = \int b\,dz\,(z^2 - \frac{1}{4}a^2)^{\frac{1}{2}}$
$= \frac{1}{2}bz\sqrt{(z^2+\frac{1}{4}a^2)} - \frac{1}{8}a^2b$ log.nat.$(z+\sqrt{(z^2-\frac{1}{4}a^2)})$
(§. 338.).; setzt man für z dessen Werth, so ist

3. $\int bdx\sqrt{(x^2+ax)} = \frac{1}{2}b(x+\frac{1}{2}a)\sqrt{(x^2+ax)} - \frac{1}{8}a^2b$
log. nat.$(x+\frac{1}{2}a+\sqrt{(x^2+ax)}) + C$.

4. Nimmt man aufs Neue $x = z + \frac{1}{2}a$, so erhält man
auf die nemliche Art
$\int bdx\sqrt{(x^2+ax)} = \frac{1}{2}b(x-\frac{1}{2}a)\sqrt{(x^2-ax)} - \frac{1}{8}a^2b$
log. nat.$(x-\frac{1}{2}a+\sqrt{(x^2-ax)}) + C$.
Folglich beyde Werthe Nr. 3 u. 4 geben.

5. $\int bdx\sqrt{(x^2 \pm ax)} = \frac{1}{2}b(x \mp \frac{1}{2}a)\sqrt{(x^2 \mp ax)} - \frac{1}{8}a^2b$.
log.nat.$(x \mp \frac{1}{2}a + \sqrt{(x^2 \mp ax)}) + C$.

§. 341.

Lehrsatz:

$$\int \frac{bdx}{x\sqrt{(a^2 \pm x^2)}} = \int bx^{-1}dx(a^2 \pm x^2)^{-\frac{1}{2}}$$
$$= -\frac{b}{a}\text{log.nat.}\left(\frac{a+\sqrt{(a^2 \pm x^2)}}{x}\right) + C$$

Beweis:

1. Man setze $x = \frac{a}{z} = az^{-1}$; also $dx = -az^{-2}dz$;

x^2

$x^2 \pm a^2 z^{-2}$; $\sqrt{(a^2 \pm x^2)} = \sqrt{(a^2 \pm a^2 z^{-2})}$
$= az^{-1}\sqrt{(z^2 \pm 1)}$; mithin

2. $\int \frac{bdx}{x\sqrt{(a^2 \pm x^2)}} = \int \frac{-abz^{-2}dz}{az^{-1}\sqrt{(z^2 \pm 1)}} =$
$= \int \frac{-bdz}{a\sqrt{(z^2 \pm 1)}} = -\frac{1}{a}\int \frac{bdz}{\sqrt{(z^2 \pm 1)}} =$

$= -\frac{b}{a}$ log. nat. $(z + \sqrt{(z^2 \pm 1)}) + C$, (§. 337.).

3. Restituiret man den Werth von $z = \frac{a}{x}$ und $\sqrt{}$

$(z^2 \pm 1) = \frac{\sqrt{(a^2 \pm x^2)}}{x} = \frac{\sqrt{(a^2 \pm x^2)}}{az^{-1}}$

4. $\int \frac{bdx}{x\sqrt{(a^2 \pm x^2)}} = -\frac{b}{a}$ log. nat. $\left(\frac{a}{x} + \frac{\sqrt{(a^2 \pm x^2)}}{x}\right)$
$+ C.$

$= +\frac{b}{a}$ log. nat. $\left(\frac{a + \sqrt{(a^2 \pm x^2)}}{x}\right) + C.$

§. 342.

Lehrsatz:

$$\int \frac{bdx}{a^2 - x^2} = \int b x^0 d_x (a^2 - x^2)^{-1}$$
$$= \frac{b}{2a} \text{ log. nat. } \left(\frac{a+x}{a-x}\right) + C.$$

Beweis:

1. Man zerlege den Bruch $\frac{1}{a^2 - x^2} = \frac{1}{(a+x)(a-x)}$

in zwey Brüche $\frac{A}{a+x} + \frac{B}{a-x}$; das ist

$$\frac{1}{a^2-x^2} = \frac{A}{a+x} + \frac{B}{a-x} = \frac{aA-Ax+aB+Bx}{a^2-x^2},$$

$1 = aA + aB + (B-A)x$, und

$0 = aA + aB - 1 + (B-A)x$; folglich (§. 189.)

$aA + aB - 1 = 0$; und $B - A = 0$, also $B = A$, und

$aA + aA - 1 = 0$; mithin $A = \frac{1}{2a}$, folglich

$$2.\ \frac{1}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a(a+x)} + \frac{1}{2a(a-x)};$$

$$3.\ \int \frac{bdx}{a^2-x^2} = \int \left(\frac{bdx}{2a(a+x)} + \frac{bdx}{2a(a-x)}\right)$$

$$= \frac{b}{2a}\int \frac{dx}{a+x} - \frac{b}{2a}\int \frac{-dx}{a-x}$$

$$= \frac{b}{2a}\text{log. nat.}(a+x) - \frac{b}{2a}\text{.log. nat. }(a-x) + C. \text{ (§. 325.)}$$

$$= \frac{b}{2a}\text{log.nat.}\left(\frac{a+x}{a-x}\right) + C. \text{ (§. 228.)}$$

§. 343.

Lehrsatz:

$$\int \frac{bdx}{x^2-a^2} = \int bx^0 dx\,(x^2-a^2)^{-1} = \frac{b}{2a}\text{log.nat.}\left(\frac{a-x}{a+x}\right) + C.$$

Beweis:

1. Man setze $\frac{1}{x^2-a^2} = \frac{A}{x+a} + \frac{B}{x-a} = \frac{Ax-aA+Bx+aB}{x^2-a^2}$

$1 = aB - aA + (A+B)x$, und

$0 = aB - aA - 1 + (A+B)x$; mithin (§. 189.)

aB

$aB - aA - 1 = 0$; $A + B = 0$; also $B = -A$, und

$-aA - aA - 1 = 0$; $2aA = -1$; $A = -\frac{1}{2a}$;

$B = \frac{1}{2a}$ folglich

2. $\frac{1}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a(x-a)} - \frac{1}{2a(x+a)}$ und

3. $\int \frac{bdx}{x^2 - a^2} = \int \left(\frac{bdx}{2a(x-a)} - \frac{bdx}{2a(x+a)} \right)$

$= \frac{b}{2a}$ log. nat. $(x-a) - \frac{b}{2a}$ log. nat. $(x+a) + C.$

$= \frac{b}{2a}$ log. nat. $\left(\frac{x-a}{x+a}\right) + C.$

§. 344.

Lehrsatz:

$$\int \frac{bdx}{ax \pm x^2} = \int bx^{-1} dx (a \pm x^1)^{-1} = \int bx^{-2} dx (ax^{-1} \pm 1)^{-1}$$

$$= -\frac{b}{a} \text{ log. nat. } \left(\frac{a \pm x}{x}\right) + C = \frac{b}{a} \text{ log. nat. } \left(\frac{x}{a \pm x}\right) + C$$

Beweis:

$$\int bx^{-2} dx (ax^{-1} \pm 1)^{-1} = \int \frac{bx^{-2} dx}{ax^{-1} \pm 1} = -\frac{b}{a}$$

$$\int \frac{ax^2 - dx}{ax^{+1} \pm 1} = \frac{a}{b} \log.\,nat.(ax^{+1} \pm 1) + C. =$$

$$= \frac{b}{a} \log.nat \left(\frac{a \pm x}{x}\right) + C. \text{ (§. 325.)}$$

$$= \frac{b}{a} \log.nat. \left(\frac{x}{a \pm x}\right) + C \text{ (§. 232. VI. Zuſ.).}$$

§. 345.

Lehrſatz:

$$\int \frac{bdx}{x^2 - ax} = \int bx^{-1} dx (x-a)^{-1} = \int b\, x^{-2} dx (1 - ax^{-1})^{-1}$$

$$= \frac{a}{b} \log.nat.\left(\frac{x-a}{x}\right) + C = \frac{b}{a} \log.nat.\left(\frac{x}{x-a}\right) + C$$

Beweis:

$$\int bx^{-2} dx (1 - ax^{-1})^{-1} = \int \frac{bx^{-2} dx}{1 - ax^{-1}} = \frac{b}{a}$$

$$\int \frac{ax^{-2} dx}{1 - ax^{-1}} = \frac{b}{a} \log.nat.(1 - ax^{-1}) + C = \frac{b}{a}$$

$$\log.\ nat. \left(\frac{x-a}{x}\right) + C. \text{ (§. 325.)}$$

$$= \frac{b}{a} \log.nat.\left(\frac{x}{x-a}\right) + C \text{ (§. 232. VI. Zuſ.)}$$

$$+ C + \left(\frac{x}{x \pm s}\right)$$

§. 346.

Aufgabe:

Das Integral von $x^n dx (a + bx^m)^p$ durch das bekannte Integral von $x^r dx (a + bx^m)^p$ beſtimmen, wenn $(n-r) : m$ eine poſitive ganze Zahl iſt.

Die

Die Auflösung sowohl, als der Beweis ist in der VIII. Tabelle auseinander gesetzet.

§. 347.

Aufgabe:

$\int -A\,x^6 dx\,(x^2+c^2)^{-\frac{1}{2}}$ suchen.

Auflösung:

1. Offenbar ist $x^6 dx\,(x^2+c^2)^{-\frac{1}{2}}$ unter der Form $x^n dx\,(a+bx^m)^p$ enthalten.

2. Unter den bisher entwickelten Integralen, hat $\int bx^o dx(x^2 \pm a^2)^{-\frac{1}{2}}$ (§. 337.), oder was einerley $\int bx^o dx\,(x^2+c^2)$ die nemliche Form mit $\int x^r dx\,(x^2+c^2)^p$ (§. 346.);

3. Da nun $(n-r):m = (6-o):2 = 3$ ist, so läßt sich das Integral von $x^6 dx(x^2+c^2)^{-\frac{1}{2}}$ aus dem bekannten von $x^o dx(x^2+c^2)$ entwickeln; es ist nemlich

4. $n = 6$; $r = o$; $m = 2$; $p = -\frac{1}{2}$; mithin $1+n-m = 5 = f$; $1+n+mp = 6 = g$;

5. Ferner $a = c^2$; und $b = 1$, mithin §. 346. III.

$$\int x^6 dx(x^2+c^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{6}x^5(x^2+c^2)^{\frac{1}{2}} - \frac{5}{6.4}c^2x^3(x^2+c^2)^{\frac{1}{2}} + \frac{5.3}{6.4.2}c^4x(x^2+c^2)^{\frac{1}{2}} - \frac{5.3.1}{6.4.2}c^6 \int x^o dx(x^2+c^2)^{-\frac{1}{2}} + C$$

6. Nun ist $\int x^o dx(x^2+c^2)^{-\frac{1}{2}} = \text{lognat}(x+\sqrt{(x^2+c^2)})$ (§. 337.) folglich

7.

7. $\int -Ax^6dx(x^2+c^2)^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{6}Ax^5(x^2+c^2)^{\frac{1}{2}} +$
$+\frac{5}{6.4}Ac^2x^3(x^2+c^2)^{\frac{1}{2}} - \frac{5.3}{6.4.2}Ac^4x(x^2+c^2)^{\frac{1}{2}} +$
$+\frac{5.3.1}{6.4.2}Ac^6\text{log.nat.}(x+\sqrt{(x^2+c^2)}+C.$

§. 348.

Aufgabe:

Das Integral von $x^n dx(a+bx^m)^p$ aus dem bekannten von $x^r dx(a+bx^m)^p$ bestimmen, wenn $(n-r):m$ eine negative ganze Zahl ist.

Auflösung.

1. Es sey $(n-r):m = -q$, wo also q eine ganze positive Zahl ausdrückt, so ist $n-r = -mq$; und $r-n = mq$; mithin $(r-n):m = q$ eine positive ganze Zahl.

2. Man verwechsle daher das Differential, dessen Integral man sucht, mit jenem, dessen Integral bekannt ist, und bestimme das Bekannte aus dem Unbekannten, das ist,

3. Man subsummire das Differential, dessen Integral bekannt ist, unter $x^n dx(a+bx^m)^p$, und das gesuchte Integral unter $x^r dx(a+bx^m)^p$.

4. Construire aus §. 346 die Formel, aus welcher man am Ende durch Uebersetzung das unbekannte Integral vermittels des gegebenen erhält.

§. 349.

Aufgabe:

Man soll $x^{-\frac{3}{2}}dx(1-x)^{\frac{1}{2}}$ durch Hilfe des bekannten Integrals $\int x^{\frac{1}{2}}dx(1-x)^{\frac{1}{2}}$ integriren.

Auf-

Auflösung:

1. Da $(-\frac{3}{2}-\frac{1}{2}):1=-2$ eine negative ganze Zahl ist, so setze man nach §. 347. das bekannte Integral $\int x^{\frac{1}{2}}dx(1-x)^{\frac{1}{2}}=\int x^n dx(a+bx^m)^p$, und

2. Das gesuchte Integral $\int x^{-\frac{3}{2}}dx(1-x)^{\frac{1}{2}}=$
$\int x^r dx(a-bx^m)^p$

3. Da nun $(n-r):m=(\frac{1}{2}+\frac{3}{2}):1=2$, so ist nach §. 346 das erste Integral durch das zweyte bestimmt.

4. Man setze also $n=\frac{1}{2}$; $r=-\frac{3}{2}$; $m=1$; $p=\frac{1}{2}$, mithin $1+n-m=\frac{1}{2}=f$; $1+n+mp=2=g$;

5. Ferner $a=1$; $b=-1$; folglich 346. II.

5. $\int x^{\frac{1}{2}}dx(1-x)^{\frac{1}{2}}=-\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}}(1-x)^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{4}x^{-\frac{1}{2}}(1-x)^{\frac{3}{2}}-$
$-\frac{1}{8}\int x^{-\frac{3}{2}}dx(1-x)^{\frac{1}{2}}$

7. Aus dieser Gleichung bestimme man das gesuchte Integral durch Uebersetzung (§. 347. Nr. 4.), das ist:

8. $\int x^{-\frac{3}{2}}dx(1-x)^{\frac{1}{2}}=-4x^{\frac{1}{2}}(1-x)^{\frac{3}{2}}-2x^{-\frac{1}{2}}$
$(1-x)^{\frac{3}{2}}-8\int x^{\frac{1}{2}}dx(1-x)^{\frac{1}{2}}$

Wo offenbar das gesuchte Integral bestimmt ist, im Falle $\int x^{\frac{1}{2}}dx(1-x)^{\frac{1}{2}}$ bekannt ist.

§. 350.

Aufgabe:

$\int x^n dx(a+bx^m)^p$ durch Hilfe von $\int x^r dx(a+bx^m)^q$ bestimmen, wenn $(n-r):m$ eine ganze positive oder negative, hingegen $p-q$ eine ganze positive Zahl ist.

Die Auflösung sammt dem Beweise ist in der IX. Tabelle entwickelt.

§. 351.

Aufgabe:

$\int x^n dx (a+bx^m)^p$ durch das bekannte Integral $\int x^r dx (a+bx^m)^q$ zu entwickeln, wenn $\frac{n-r}{m}$ eine ganze positive oder negative, und $p-q$ eine negative ganze Zahl ist.

Auflösung:

Man verfahre auf ähnliche Art wie §. 348, das ist, man verwechsle wieder das Gesuchte mit dem Gegebenen, und bestimme letzteres nach §. 350 aus dem erstern oder gesuchten. Am Ende erhält man durch Uebersetzung das gesuchte Integral.

I. Zusatz: Allemal läßt sich $\int x^n dx (a+bx^m)^p$ durch $\int x^r dx (a+bx^m)^q$ bestimmen, wenn $\frac{n-r}{m}$, und $p-q$ ganze positive oder negative Zahlen sind.

II. Zusatz: Wenn in einer Auflösung $g(g+m)(g+2m)\ldots = 0$ wird, so muß man in den Differentialen des gesuchten sowohl als des bekannten Integrals erst die veränderliche Größe in das andere Glied des Binomiums schaffen (§. 330.), dann erst die Reduction vornehmen.

§. 352.

Aufgabe:

$x^2 dx (x^2-1)^{\frac{3}{2}}$ zu integriren.

Auf-

Auflösung:

1. $x^2dx(x^2-1)^{\frac{3}{2}}$ läßt sich aus §. 327, 328 und 331 nicht integriren, und da unter den Lehrsätzen §. 337—345 nirgend $\frac{3}{2}$ der Exponent des Binoniums ist, so kann das Integral auch nicht durch §. 346 oder 348 unmittelbar bestimmt werden; indessen ist es doch von der Form $x^n dx(a+bx^m)^p$.

2. $b^0 x dx(x^2 \pm a^2)^{-\frac{1}{2}}$ (§. 337.) oder was einerley ist, $x^0 dx(x^2-1)^{-\frac{1}{2}}$ ist von der Form $x^r dx(a^2+bx^m)^q$;

3. Nun ist $\frac{n-r}{m} = \frac{2-0}{2} = 1$, und $p-q = \frac{3}{2}+\frac{1}{2} = 2$;

folglich läßt sich aus §. 350 das gegebene Differential durch Hilfe des bekannten Integrals $\int x^0 dx(x^2+1)^{-\frac{1}{2}}$ bestimmen.

4. Es ist nemlich $n = 2$, $r = 0$, $m = 2$; $p = \frac{3}{2}$; $q = -\frac{1}{2}$, ferner $a = -1$; $b = 1$; und $1+n = 3 = g$; und weil $p-q = 2$, so ist §. 350. II.

5. $\int x^2 dx(x^2-1)^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3}x^3(x^2-1)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{5}x^5(x^2-1)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{5}\int x^6 dx(x^2-1)^{-\frac{1}{2}} + C.$

6. Vergleicht man $\int x^6 dx(x^2-1)^{-\frac{1}{2}}$ mit dem bekannten $\int x^0 dx(x^2-1)^{-\frac{1}{2}}$, so ist $\frac{6}{2} = 3$, folglich läßt sich ersteres durch das letztere bestimmen (§. 346.).

7. Es ist nemlich aus §. 347.

$$\int x^6 dx(x^2-1)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{6}x^5(x^2-1)^{\frac{1}{2}} - \frac{5}{6.4}x^3(x^2-1)^{\frac{1}{2}} +$$

$$+\frac{5\cdot3}{6.4.2}x(x^2-1)^{\frac{1}{2}}-\frac{5\cdot3\cdot1}{6.4.2}\int x^0dx(x^2-1)^{-\frac{1}{2}}+C=$$

$$=\tfrac{1}{6}x^5(x^2-1)^{\frac{1}{2}}-\frac{5}{6.4}x^3(x^2-1)^{\frac{1}{2}}+\frac{5\cdot3}{6.4.2}x$$

$$(x^2-1)^{\frac{1}{2}}-\frac{5\cdot3\cdot1}{6.4.2}\text{ log. nat. }(x+\sqrt{(x^2-1)})+C.$$

8. Folglich

$$\int x^2dx\,(x^2-1)^{\frac{3}{2}}=\tfrac{1}{7}x^3(x^2-1)^{\frac{3}{2}}-\tfrac{1}{5}x^5(x^2-1)^{\frac{1}{2}}+$$

$$+\tfrac{1}{30}x^5(x^2-a)^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{6.4}x^3(x^3-1)^{\frac{1}{2}}+\frac{3}{6.4.2}x$$

$$(x^2-1)^{\frac{1}{2}}-\frac{3\cdot1}{6.4.2}\text{ log. nat. }(x+\sqrt{(x^2-1)})+C.$$

Anmerkung: Die Regeln für die Integration der Differentiale von Exponentialgrößen, von mehrern unbekannten, und der Differentiale höherer Ordnungen zu entwickeln, würde für gegenwärtiges Lehrbuch zu weitläufig seyn.

Anm.

Anhang

von den in verschiedenen Ländern, vorzüglich in Baiern üblichen Maaße, Gewichte und Münzen.

I. Abtheilung.

Vom Maaße.

I.

Vom Längenmaaße.

A.

Vom Längenmaaße überhaupt.

1. Um eine Länge zu bestimmen, bedient man sich verschiedener Maaße, eines Fußes, einer Elle, einer Klafter, oder Meile, je nachdem die zubestimmende Länge kleiner oder größer ist.

2. Das Verhältniß des baierischen zu dem ehemaligen königlichen Pariser Fuße ist = 1000 : 1113, und wurde durch die baierische Akademie mit aller Schärfe bestimmt, wenn man nemlich den Pariser Fuß in 144 Linien theilt, so hält der baierische Fuß nach obigem Verhältniße 129,38 solche Theile; Hr. Legations-Sekretär Beigel fand bey wiederholter Prüfung den baierischen Fuß 129,383. Man

sehe Churpfalzbaierisches Regierungs-Intelligenzblatt V. St. 1800. Seite 79, und Zachs monathliche Correspondenz I. Band, Seite 610.

3. Die baierische Elle hält nach Hrn. Beigels Angabe genau 370,16 Pariser Linien; mithin im baierischen Duodecimalmaaße 2 Fuß, 10 Zoll, 3,988 Linien, und im baierischen Decimalmaaße 2 Fuß, 8 Zoll, 6,108 Linien.

4. Man theilet die Elle in halbe, Drittl, Viertl Ellen u. s. w.

5. Eine baierische Klafter hält genau 6 baierische Fuß.

B.

Eintheilung des Fußmaaßes überhaupt.

a. Im Duodecimalmaaße.

Fuß	Zoll	Linien	Scrupl
1 Fuß	12	144	1728
1 Zoll	12	144	
1 Linie	12		
Scrupl			

b. Im Decimalmaaße.

Fuß	Zoll	Linien	Scrupl
1 Fuß	10	100	1000
1 Zoll	10	100	
1 Linie	10		
Scrupl			

C. Ver-

C.

Verhältnisse verschiedener Fuß- und Ellenmaaße nach dem Pariser Fuß zu 144 Duodec. Linien.

Namen der Länder und Oerter.	1 Fuß hält Par. Linien	Logarithmus		1 Elle hält an Par. Lin.	Logarithmus	
Amsterdam	125,5	2,0986937	a	306,0	2,4857214	a
. . .	125,48	2,0985745	b	305,39	2,4848548	b
Anspach . .	132	2,1205739	b	272	2,4345689	b
				gr.270,2	2,4316853	a
Augsburg .	131,3	2,1182647	c	. . 268,8	2,4294293	c
. . .	131,29	2,1182316	d	fl. 262,6	2,4192947	a
				. . 260,0	2,4149733	c
Batern u. die	129,38	2,1118671		370,16	2,5683895	
Oberpfalz .	129,383	2,1118772				
Bayreuth .	132	2,1205739	e	291,7	2,4649364	e
Berlin und in Preußen überh.	139,13	2,1434208	f	296,0	2,4712917	f
Breßlau .	127,65	2,1060208	b	255,3	2,4070508	a
				gr.307,8	2,4882686	a
Brüßel . .	. . . .	. . . .		fl.303,4	2,4820156	a
Dänemark	139,13	2,1434208	a	278,26	2,4444508	a
Dreßden .	125,5	2,0986437	a	250,9	2,3995007	a
				fl.405,5	2,6079909	a
Engelland .	135,158	2,1308419	h	gr.506,9	2,7049223	b
Eichstädt .	134,784	2,1296385	g	342,6	2,5347874	g
Frankf. am M	127	2,1038037	a	239,2	2,3787612	a
Frankreich						
Par. Fuß .	144	2,1583625	i	526,8	2,7216458	a
neues Maaß						
Mètre .	443,296	2,6466938	i	527,04	2,7218436	i
Griechenland						
alter Fuß .	135,80	2,1328998	Nach Auzout		de la Lande	
. . . .	136,56	2,1353235	Nach le Roy		Astron. §. 2639.	

Namen der Länder und Oerter.	1 Fuß hält Par. Linien	Logarithmus		1 Elle hält Par. Linien.	Logarithmus.	
Hamburg .	127	2,1038037	a	254	2,4048337	a
Leipzig						
Baufuß . .	125,3	2,0979511	e	250,6	2,3989811	a
gemein. Fuß	125,1	2,0972573	e	250,58	2,3989464	b
Mannheim	128,65	2,1094098	k	247,3	2,3932241	k
. . . .	128,48	2,1088355	l	246,77	2,3922924	l
Nürnberg .	134,7	2,1293676	a	292,4	2,4659774	a
. . . .	134,784	2,1296385	g	292,8	2,4665711	b
Regensburg	138,6	2,1417632	m	359,5	2,5556989	m
Rheinländischer Fuß .	139,13	2,1434208		Nach Eisenschmid de Pond. et Mens.		
. . . .	139,183	2,1435862		Nach Lulofs. de la Lande Astr. §. 2639.		
Rom alter Fuß	130,9	2,1169396		Mem. de l'ac. de Paris an. 1757		
neuer Palmo	99,03	1,9957668		Nach Boscowich de la Lande Astr. §. 2639.		
Rußland . .	238,6	2,3776704	a	315,4	2,4988617	a
Salzburg .	131,5	2,1189258	n	in Seide 355	2,5502284	k
				in Leinw 445,8	2,6491401	k
Schweden .	131,6	2,1192559	a	263,2	2,4202859	a
Tyrol . . .	148,11	2,1705844	a	356,47	2,5520230	a
Wien u. ganz Oestreich.	140,13	2,1465311	a	345,42	2,5383475	a

Anmerkung: Die in der Spalte neben den Logarithmen gesetzte Buchstaben beziehen sich auf die Quellen, aus welchen die Angaben genommen sind.

a. Vega logarithmisch-trigonometrisches Handbuch. Leipzig in der Weidmannischen Buchhandlung 1800.

b. Grüson Grundriß der reinen und angewandten Mathematik I. Theil Seite 261.

c. Hr. Höschel theilte mir diese Bestimmungen mit.

d. Ammanns geograph. Ortsbestimmungen im östlichen Schwaben. I Abschn. N. 6.

e. Diese Bestimmungen eines mir unbekannten Gelehrten in Erlang besorgte Hr. Hofrath und Prof. Meusel allda.

f. Eytelwein Vergleichungen der in den königl. preuß. Staaten eingeführten Maaße und Gewichte.

g. Hr. geistl. Rath und Prof. Pickel untersuchte die eichstädtischen Maaße und Gewichte, und theilte mir seine Resultate mit.

h. Tobias Mayr praktische Geometrie I. Band.

i. Instruction sur les Mesures et Poids nouveaux par Marthurin-Jacques Brisson. An. VIII. Und Vega's Aufsatz in Zachs monathl. Correspondenz I. Band. Seite 460.

k. Schulze logarithmische Tafeln. Berlin 1777.

l. Münchner chronologisch-genealogischer Handkalender fürs Jahr 1797. Seite 101.

m. Hr. Placidus Heinrich, Benediktiner und Professor der Naturlehre im Reichsstifte zu St. Emmeram untersuchte die Regensburger Elle, Fußmaaß, Gewichte, und Getränkmaaß, und theilte mir seine Resultate mit.

n. Einer Nachricht von Salzburg zufolge.

D. Vom

D.

Vom Meilen Maaße.

1. Das größte übliche Längenmaaß ist die Meile, und zwar im Deutschlande die geographische, oder sogenannte deutsche Meile, deren 15 einen Meridiangrad ausmachen.

2. Für Baiern setzet Hr. Helfenzrieder in seiner Geodäsie Seite 327 einen Meridiangrad 342432 Pariser Fuß, mithin $\frac{1}{15}$ Grad, oder eine deutsche Meile in Baiern 22828,8 Par. Fuß, oder 25407,5 baierische Fuß.

3. Hr. v. Riedl in der Einleitung zu seinem baierischen Atlas nimmt die deutsche Meile für Baiern 22826,6 Par. Fuß = 25406 baierische Fuß, mithin eine sogenannte Stunde zu 12703 baier. Fuß, und in dieser Entfernung von einander wurden die baierischen Chaussée-Stundensäulen gesetzt. Ehemal betrug die Entfernung solcher Stundensäulen von einander 13000, mithin die alte Chaussée-Meile 26000 baierische Fuß.

4. Nach dem mittleren Erdhalbmesser beträgt ein mittlerer Erdgrad 57030 Toisen, folglich eine geographische Meile 3802 Toisen = 22812 Pariser Fuß = 25389,76 baierische Fuß. Lorenz angewandte Math. II. Abth. Geogr. §. 89.

5. Hr. Klügel setzet den mittleren Erdgrad 57173,5 Par. Toisen, mithin die geographische Meile 3811,6 Par. Toisen = 22869,6 Pariser Fuß = 25453,9 baierische

baierische Fuß. Bode Anleitung zur allgemeinen Kenntniß der Erdkugel. §. 154.

6. Vermöge der neuesten französischen Vermessungen beträgt der Quadrant eines Meridians 30784440 Pariser Fuß, mithin der 90ste Theil, oder ein Grad 342049/33 Pariser, oder 380701 baierische Fuß, und die geographische oder deutsche Meile 3800/55 Toisen = 22803/29 Pariser = 25380/076 baierische Fuß. Brusson Instruction sur les Mesures et Poids etc.

E.

Verhältniß verschiedener Meilen zur geographischen nach Klügel von 3811,6 Toisen.

Namen der Meilen in verschiedenen Ländern.	100 Meilen betragen an geographischen Meilen.	Jede Meile hält Pariser Fuß.	Gehen auf einen Meridiangrad.	Verhältniß der Quadratmeilen, die geographisch = 1000 gesetzt.
Arabische . .	26,470	6053,5	56,67 .	14273
Baierisch. Chaussée-Meile . .	99,812	22826,6	15,028	1003,7
Böhmische . .	93,052	21270,0	16,12	1155
Dänische . . .	101,430	23197,2	14,79 .	972
Deutsche alte .	59,860	13722,1	25,00	2778
neue kleine .	84,527	1933 0,9	17,74	1399
geograph. nach Klügel .	100,000	22869,6	15,00	1000
. . nach der neuen franz. Verm.	99,7105	22803,29	15,0436	1005,8
Französische alte Leuka . .	29,762	6806,43	50,50	11334

Namen

Namen der Meilen in verschiedenen Ländern.	100 Meilen betragen an geographischen Meilen.	Jede Meile hält Pariser Fuß.	Gehen auf einen Meridiangrad.	Verhältniß der Quadratmeilen, die geographische = 1000 gesetzt.
Französis. neue Lieues $\frac{1}{25}$ Gr.	59,826	13681,97	25,0727	2794
neue Seemeilen v. $\frac{1}{20}$ Gr.	74,7825	17102,47	20,0582	1788
neue v. $\frac{1}{20}$ Centesimalgrad	67,304	15392,22	22,286	2208
Großbrittannische alte .	31,512	7206,75	47,60	10070
neue zu 1760 Yards . .	21,702	4963,23	69,12	21234
Seemeilen .	24,999	5717,13	60,00	16000
Leagues . .	73,729	17150,40	20,00	1778
Holländische .	78,948	18055,12	19,00	1604
Italienische . .	24,992	5717,13	60,00	16000
Jüdische alte, Sabatherweg zu 200 jüd. biblischen Ellen	14,881	3403,22	100,80	45158
Londner v. $1666\frac{2}{3}$ Yards . .	20,549	4699,36	73,00	23684
Nürnbergische .	114,110	26186,5	13,10	762,7
Oestreichische Postmeilen .	102,123	23355,00	14,69	959
Preußische . .	104,390	23873,76	14,37	918
Portugiesische .	83,332	19057,44	18,00	1440
Römische zu 8 olymp. Stadien	19,864	4543,75	75,50	25334
Rußische Meilen oder Wersta	14,378	3288,20	104,30	48349
Sächsische Polizeymeilen .	122,050	27912,00	12,29	671
Schwäbische .	124,940	28587,00	12,00	640

Namen der Meilen in verschiedenen Ländern.	100 Meilen betragen an geographischen Meilen.	Jede Meile hält Pariser Fuß.	Gehen auf einen Meridiangrad.	Verhältniß der Quadratmeilen, die geographische = 1000 gesetzt.
Schwedische .	144,090	32953,50	10,41	480
Schweizerische	112,520	25795,25	13,30	786
Spanische . .	56,329	12882,00	26,63	3152
Stadien griechisch-olympische . . .	2,498	571,43	600,00	1600000
Türkische gewöhnliche, oder Berri .	22,497	5144,94	66,67	19755
Seemeilen .	17,662	4039,21	86,40	33178
Ungarische . .	112,530	25734,35	13,33	790

Anmerk. Außer den schon angeführten Quellen zur Bestimmung der baierischen und neuen französischen Meilen bestimmte ich die östreichischen Postmeilen aus Vega's logar. Handb. Alle übrigen Angaben sind aus Tobias Mayrs pract. Geom. IV. Th. §. 11. und Bode's Anleitung zu Erdkunde §. 244. genommen.

II.

Vom Flächenmaaße.

1. Kleinere Flächen werden durch Quadratfuße, Quadratzolle und so weiter, das ist, durch Flächen gemessen, die in der Länge und Breite einen Fuß, oder einen Zoll halten.

2. Bey

2. Bey grösern Flächen dient zum Maaße das Juchart, oder Tagwerk, welches in Baiern nach einem Gesetze vom Jahre 1616 genau 40000 baierische Quadratfuß hält.

3. Das größte Flächenmaaß ist endlich die Quadratmeile, deren Größe sowohl, als die Verhältnisse in verschiedenen Ländern aus der vorhergehenden Tabelle bestimmt werden können.

4. Eintheilung des Quadratfußes.

a. Im Duodecimalmaaße.

□ Fuß	□ Zoll	□ Linien	□ Scrupel
□ Fuß	144	20736	2985984
	□ Zoll	144	20736
		□ Linie	144
			□ Scrupel

b. Im Decimalmaaße.

□ Fuß	□ Zoll	□ Linien	□ Scrupel
□ Fuß	100	10000	1000000
	□ Zoll	100	10000
		□ Linie	100
			□ Scrupel

5. Das neue Flächenmaaß in Frankreich heißt Are, und hält 947,681746 Pariser Quadratfuß; Décare ist = 10 Ares; Déciare = $\frac{1}{10}$ Are; und Centiare = $\frac{1}{100}$ Are = 9,476817 46 Par. Quadratfuß, welches das Quadrat vom Mètre ist (Brusson Instruction etc.).

III.

Vom Körpermaaße.

Zum Körpermaaße dienen:

1. Der Cubikfuß, welcher nach der Decimaleintheilung aus 1000 Cubikzollen, und letzterer wieder aus 1000 Cubiklinien besteht; im Duodecimalmaaße hingegen hält der Cubikfuß 1728 Duodec. Cubikzolle und ein Duodecimal-Cubikzoll 1728 Duodec. Cubiklinien.
2. Die Cubikmeile, welche das größte Körpermaaß ist.
3. Die Klafter als Holzmaaß, welche in Baiern 6 Schuhe im Quadrate hält, uud wo die Scheitter $3\frac{1}{2}$ baier. Schuhe lang seyn sollen.
4. Verschiedene Früchtenmaaße, als Getreid- Weinmaaß.
5. Einige Körper werden nur gezählt, z. B. das Papier.
6. Einige hingegen nach dem Gewichte bestimmet.

A.

Baierisches Getränkmaaß.

Die sogenannte Münchner Maß, welche genau, so wie auf dem Muttermaaße verzeichnet ist, 43 baierische Decimal-Cubikzolle hält, dient zum allgemeinen vorgeschriebenen Maaße für ganz Baiern, die obere Pfalz und Pfalz-Neuburg; man theilt solche in halbe Maße oder Seidel, ferner in $\frac{1}{4}$ Maß oder Quartl, und $\frac{1}{8}$ Maß oder Achterl; der baierische Eymer hält 60

Maße,

Maße, mithin 2580 baierische Decimal-Cubikzolle, oder 4458,240 baierische Duodecimal-Cubikzolle; der Visier-Eymer hingegen, wie er an die Wirthe abgegeben wird, hält 64 Maße, mithin 2752 baier. Dec. Cub. Zolle = 4755,456 baier. Duod. Cubikzolle.

B.

Größe verschiedener Getränkmaaße in französischen Duodecimal-Cubikzollen.

Maaße verschiedener Oerter.	Französ. Duodec. Cubikzoll.	Logarithmus.	
Augsburg. Eymer zu 60 M.	3234,205	3,5097737	c
. . . zu 64 M.	3449,818	3,5377962	c
Baiern. Maß	53,8923	1,7315267	
Schenk-Eymer zu 60 M.	3233,538	3,5096771	
Visier-Eymer zu 64 M.	3449,1072	3,5377067	
Bayreuth. Eymer zu 60 M.	3480	3,5415792	e
. . . zu 64 M.	3712	3,5696080	e
Berlin. Quart	59	1,7708520	f
Wein-Eymer zu 64 Quart	3776	3,5770320	f
Bieröhmchen zu 24 Quart	1416	3,1510633	f
Eichstädt. Wein-Eymer zu 64 Weinmaß	3577,4	3,5535675	g
Bier-Eymer zu 64 Biermaß	3912,6	3,5924655	g
Frankreich. Ehemalige Pinte	48	1,6812412	i
Neues Maß Litre = Decimètre cube . . .	50,4124416	1,7025374	i
Mannheim. Maß . . .	86,228	1,9356483	l
Ohm zu 48 Maß . .	4138,944	3,6168896	l
Fuder zu 10 Ohm . .	41389,44	4,6168896	l
Nürnberg. Eymer zu 64 M.	3385	3,5295587	g

Maaße verschiedener Oerter.	Französ. Duodec. Cub. Zolle.	Logarithmus.	
Regensburg Köpfel . . .	42	1,6232493	m
Weineymer großer zu 88 Köpfel . . .	3696	3,5677320	m
. . Bergeymer zu 68 Köpfel . . .	2856	3,4557582	m
Biereymer zu 64 Köpfel .	2688	3,4294293	m
Wien und ganz Oestreich Eymer zu 40 Maß . .	2853,56	3,4553875	a

Anmerkung. Die in der letzten Spalte befindlichen Buchstaben beziehen sich wieder auf die Angabsquellen, die beym Längenmaaße Tab. C. alle angezeigt sind.

Anmerk. zu c. Der Augsburger Getraidvierling, oder $\frac{1}{32}$ Schaaf, welcher 6 Schenkmaß hält, besteht nach Hrn. Höschels Angabe aus einem Cylinder, dessen Höhe sowohl, als Durchmesser der Basis = 0,68 Augsburgerfuß ist; aus diesen berechnete ich die in der Tabelle angezeigte Größe des Augsburger Eymers.

C.

Baierisches Getraidmaaß.

Das für Baiern sowohl, als die obere Pfalz und Pfalz Neuburg vorgeschriebene Getraidmaaß ist das sogenannte Münchner Schäffel. Die Größe dieses Maaßes mit Schärfe zu bestimmen, ist seiner

Form

Form wegen, als eines abgekürzten Kegels, immer sehr schwer; die bisher angestellten Versuche geben die Größe auf 208 oder $208\frac{1}{2}$ Münchner Maß, das ist, zwischen 8944 und 8965/5 baierischen Decimal-Cubikzollen, oder zwischen 15855/232 und 15892/384 baierischen Duodecimal-Cubikzollen an.

I. Der Hr. geistliche Rath Westenrieder in der Beschreibung der Stadt München, vermuthlich nach Versuchen der baierischen Akademie, setzet das Münchner Schäffel $208\frac{1}{2}$ baierische Maß, oder = 8965/5 baier. Decimal-Cubikzolle.

II. Von Forstnern, baierischer Artillerie-Oberst-Lieutenant, fand den 1. Sept. 1779 durch Versuche das Münchner Schäffel 208 Maß, oder 8944 baierische Dec. CubZolle, und ließ diese Bestimmung in das Münchner Wochenblatt einrücken.

III. Hr. Vicelin Schlögel, Canonicus in Polling, setzte als Lehrer der Mathematik zu Ingolstadt den Inhalt auf $208\frac{1}{2}$ baier. Maß. Die Stelle eines Schreibens an mich vom 14. Jän. 1802, welche sich darauf bezieht, ist folgende: „Das Getraidmaaß hängt ganz „von dem Getränkmaaße ab; denn $208\frac{1}{2}$ baier. Ge„tränkmaß machen genau ein Münchner Schäffel von „6 Münchner Metzen, so fand ich es das erstemal „in einer Abhandlung, welche der sel. Hr. Hofkam„merrath von Waizenbeck, als er noch Magazins-Com„missarius war, herausgab. Und daß es so sey, „habe ich im Jahre 1790 in Neuburg, wohin ich zur „Reduction der verschiedenen Mäßereyen des Herzog-

„thums

„thums Neuburg in die Münchner Mäßerey berufen „worden, in Gegenwart fast aller Neuburgischen H. H. „Hofkammerräthe durch eine unter meiner Direction „verfertigte Wassereichmaschine handgreiflich gezeigt."

IV. Der Hr. Sächsische Legat. Secret. Beigel giebt den Inhalt des baierischen Schäffels zwischen 208 und 208½ Münchner Maß an. In dem sowohl in Zachs monathlicher Correspondenz I. B. Seite 610, als in dem Regierungs-Intelligenzblatt eingerückten Schreiben ist aber nicht angezeigt, ob diese Bestimmungen auf neue Versuche sich stützen, oder aber nur die Resultate der bisher gemachten Versuche enthalten.

V. Vom Hrn. geistl. Rath Knogler in meiner und der H. H. Kollegen Holzinger und Hupfauer Gegenwart wurde 1799 in Ingolstadt mit möglichster Sorgfalt ein baierischer Metzen Brunnenwasser gewogen, der genau 66 lb. 29 Loth 3 Quintl im baierischen Gewichte hielt, ferner wogen 34 baierische Maß von eben diesem Brunnenwasser 65 lb. 14 Loth 2 Q. folglich faßt der baierische Metzen 34,767, und das Schäffel zu 6 Metzen 208,602 baier. Maß.

VI. In der Mayrischen Sammlung Chur-Pfalzbaierischer Verordnungen II. Bande Seite 813 kömt eine Verordnung vom 9ten März 1768 vor, wo die Größe des Münchner Schäffels und Metzens auf folgende Art bestimmt ist:

„Fünftens, sind die Kalch- und so auch Gypsmä-
„ßereyen gar nicht einstimmig, sondern verschiedent-

„lich

„lich eingeführt, deren Ungleichheit dann auch viele „Beschwernisse verursachet.“

„Derowegen fürohin das ordinari Cetraidmaaß, „ober Münchner Schäffel zu 6 Metzen pr. 1 Schuh „7 Zoll hoch, dann 2 Schuh 10 Zoll (folglich ist hier „von Duodecimalzollen die Rede) in der untern Weite, „oder Diameter, und 2 Schuh 5 Zoll in der obern „Weite pro Norma genommen: so fort auch der Ge„traidmetzen zu 1 Schuh 5 und ein halben Zoll in „der obern und untern Weite oder Diameter, dann „10 und dreyviertl Zoll in der Höhe zum Ausmessen „gebraucht u. s. w.“

Nach diesen Bestimmungen hält das Schäffel als abgekürzter Kegel 14833 baierische Duodecimal-Cubikzolle: der Metzen als Cylinder aber 2585,68 baier. Duod. Cub. Zolle, folglich nach letzterer Bestimmung das Schäffel 15514,08 baier. Duod. Cubikzolle.

Wenn die Angaben in der Mairischen Sammlung nicht etwa durch Druckfehler entstellt sind, so ist der Unterschied zwischen diesen beyden Größen sowohl unter sich als mit den obigen Versuchen auffallend.

Man kann also als hinlänglich genau die Größe des baierischen Schäffels $208\frac{1}{2}$ baierische Maß oder 8965/5 baierische Dec. Cub. Zolle = 15892/384 baierische Duodec. Cub. Zolle setzen.

Nach diesem Maaße werden alle Getraidarten gemessen; beym Haber hält das Schäffel um den 6ten

Theil

Theil, das ist, um einen Metzen mehr, man mißt nemlich das gewöhnliche Schäffel, und giebt noch einen gewöhnlichen Metzen dazu, so daß also ein Haber Schäffel = 7/6 Korn oder Waizen Schäffel beträgt, und dieses ist auch von allen Unterabtheilungen zu verstehen, nemlich der Haber Metzen ist wieder = 7/6 Korn Metzen u. s. f. Man sehe die churfürstl. Verordn. d. d. Amberg den 20. Nov. 1761 im II. Bande der Mayrischen Generaliensammlung von 1784 Seite 1326—1331.

D. Eintheilung des baierischen Korn- Waitzen- und Gersten-Maaßes.

Schäffel	Metzen	Viertl $\frac{1}{2}$ Metzen	$\frac{1}{2}$ Viertl $\frac{1}{4}$ Metzen	Viertling $\frac{1}{8}$ Metzen	$\frac{1}{2}$ Viertling $\frac{1}{16}$ Metzen	Dreyßger $\frac{1}{32}$ Metzen	$\frac{1}{2}$ Dreyßger $\frac{1}{64}$ Metzen
1 Schäffel	6	12	24	48	96	192	384
1 Metzen	2	4	8	16	32	64	
1 Viertl oder $\frac{1}{2}$ Metzen	2	4	8	16	32		
$\frac{1}{2}$ Viertl oder $\frac{1}{4}$ Metzen	2	4	8	16			
1 Viertling od. $\frac{1}{8}$ Metz.	2	4	8				
$\frac{1}{2}$ Viertling od. $\frac{1}{16}$ Metz.	2	4					
1 Dreyßger od. $\frac{1}{32}$ Metz.	2						
$\frac{1}{2}$ Dreyßger od. $\frac{1}{64}$ Metz.							

E. Ein-

E. Eintheilung des Habermaaßes, und dessen Verhältniß zum Kornmaaße.

Maaße an Waitzen und Korn.							
Schäffel	Metzen	Viertl	½ Viertl	Viertling	½ Viertling	Dreyßger	½ Dreyßger
1 Schäffel Haber	7	14	28	56	112	224	448
1 Metzen Haber		$2\frac{1}{3}$	$4\frac{2}{3}$	$9\frac{1}{3}$	$18\frac{2}{3}$	$37\frac{1}{3}$	$74\frac{2}{3}$
1 Viertl Haber			$2\frac{1}{3}$	$4\frac{2}{3}$	$9\frac{1}{3}$	$18\frac{2}{3}$	$37\frac{1}{3}$
½ Viertl Haber				$2\frac{1}{3}$	$4\frac{2}{3}$	$9\frac{1}{3}$	$18\frac{2}{3}$
1 Viertling Haber					$2\frac{1}{3}$	$4\frac{2}{3}$	$9\frac{1}{3}$
½ Viertling Haber						$2\frac{1}{3}$	$4\frac{2}{3}$
1 Dreyßger Haber							$2\frac{1}{3}$
½ Dreyßger Haber							

Anm.

Anmerkung. Außer den öffentlichen Schrannen sind in Baiern sowohl, als in der Pfalz verschiedene Getraidmaaße üblich, deren Größenbestimmungen mir aber nicht mit Zuverläßigkeit bekannt sind; die Reductionen davon auf das Müncher Schäffel sind im Münchner genealogisch-chronologischen Handkalender von 1797 Seite 17, und vom Jahre 1798 Seite 109 eingerückt.

F. Größe von verschiedener Getraidmaaße in französischen Duodecimal-Cubikzollen.

Maaße verschiedener Oerter.		Französische Duodec. Cubikzoll	Logarithmus.	
Augsburg	Vierling . .	323,4205	2,5097737	c
	Metzen zu 4 Vierling .	1293,682	3,1118276	c
	Schaf zu 8 Metzen .	10349,456	4,0149176	c
	für alle Getraidsorten			
Baiern für alle Getraidsorten außer dem Haber	Metzen	1872,7574	3,2724815	
	Schäffel	11236,5444	4,0506328	
Habermaaß	Metzen	2184,8836	3,3394283	
	Schäffel	13109,3018	4,1175796	
Bayreuth	Simra = 16 Mees = 28 Maaß .	25984	4,4147060	e
	für alle Getraidsorten.			
Berlin	Schäffel zu 16 Metz. für alle Getraidsorten.	2758,952	3,4407442	f
Eichstädt	Metzen .	1890,2	3,2765078	g
	Weitzen und Korn Muth 2 Schäff. od. 32 Metz.	60486,4	4,7816578	g
	Gersten u. Dünkel zu 38 Metzen	71827,6	4,8562913	g

Maaße verschiedener Oerter.	Französische Duodec. Cubikzoll	Logarithmus.	
Eichstädt Haber Muth zu 46 Metzen	86949/2	4/9392656	g
Frankreich altes Muid = 12 Setiers = 144 Boisseaux	92160	4/9645425	f
neues allgemeines franz. Körpermaaß ist das Litre = Mètre cub .	50/412416	1/7025374	i
Décalitre = 10 littres .	504/12416	2/7025374	i
Décilitre = 0,1 littres .	5/0412416	0/7025374	i
Mannheim Simmer zu 3 Immer	769	2/8859263	l
Malter zu 8 Simmer .	6152	3/7890163	l
Für alle Getraidsorten.			
Nürnberg Metzen Weizen und Korn	1017/09	3/0073595	g
Metzen Haber, Gerste und Dünkel . . .	949/36	2/9774309	g
Wien und in den östreichischen Ländern Metzen zu 8 Achtel .	3100/54	3/4914373	a
Muth zu 30 Metzen .	93016/2	4/9685586	a
Für alle Getraidarten.			

I. **Anmerkung.** Die in der letzten Spalte vorkommenden Buchstaben geben wieder die Quellen an, welche beym Längenmaaße Tab. C. angezeigt sind.

II. **Anmerkung zu g.** Hr. geistl. Pickel theilte mir für Nürnberg die Bestimmungen mit, wie solche ehemal Franz Huberti, Prof. der Mathematik in Würzburg, bey Untersuchung der Muttermaaße fand. Nun soll der Simmer Weizen, Korn, 2 Malter oder 16 Metzen,

Metzen, das ist also 16273/44 Par. Cubikzoll, und der Simmer Haber hingegen 4 Malter oder 32 Metzen, das ist also 30379/52 Pariser Cubikzoll halten, da doch fast allgemein der Nürnberger Simmer in den Tabellen immer ohne Unterschied 16775 Pariser Cubikzoll angegeben wird; ich kann nicht bestimmen, auf welcher Seite die Angabe ächt ist.

G.

Eintheilung des Papiermaaßes.

Ballen	Riß	Buch	Bogen Schreibpap.	Bogen Druckpapier
1 Ballen	10	200	4800	5000
1 Riß		20	480	500
1 Buch			24	25
			Bogen Schreibpap.	Bogen Druckpapier

II. Abtheilung.

Vom Gewichte.

Das baierische Pfund Handelsgewicht fand Hr. Legations-Sekretär Beigel in holländischen Asen Troygewicht 11682, und die Cöllnermark Münzgewicht 4870 Asen holl. Troygewicht, Hr. Eytelwein setzet hingegen die Cöllner Mark 4864 holl. Asen gleich. Das Apothekergewicht, welches für ganz Deutschland einerley seyn soll, setzet Vega 7443/9, Eytelwein hingegen 7438 holl. Asen Troygewicht. In ganz Baiern und obern Pfalz ist einerley Gewicht eingeführet.

A.

Eintheilung des baierischen Handelsgewichtes.

Centner	Pfund	Unze	Loth	Quintl	Pfenning gewicht	Gran
1 Centn.	100	1600	3200	12800	51200	768000
1 Pfund	16	32	128	512	7680	
1 Unze	2	8	32	480		
1 Loth	4	16	240			
1 Quintl	4	60				
1 Pfenning gewicht	15					
Gran						

B.

Eintheilung des baierischen und überhaupt des deutschen Apothekergewichtes.

Pfund	Unze	Loth	1 Drachma oder Quintl	Scrupl	Gran
1 Pfund	12	24	96	288	5760
1 Unze	2	8	24	480	
1 Loth	4	12	240		
1 Drachma od. Quintl	3	60			
1 Scrupl	20				
Gran					

C. Ein-

C.

Eintheilung des baierischen Münzgewichtes, oder der Cöllner Mark.

Mark	Unzen	Loth	Karat	Quintl	Pfenning	Gran	Eschen oder Aß	Richt-pfenning
1 Mark	8	16	24	64	256	288	4352	65536
1 Unze	2	3	8	32	36	544	8192	
1 Loth	$1\frac{1}{2}$	4	16	18	272	4096		
1 Karat	$2\frac{2}{3}$	$10\frac{2}{3}$	12	$181\frac{1}{3}$	$2730\frac{2}{3}$			
1 Quintl	4	$4\frac{1}{2}$	68	1024				
1 Pfenning	$1\frac{1}{8}$	17	256					
1 Gran	$15\frac{1}{9}$	$227\frac{5}{9}$						
Eschen oder Aß	$15\frac{1}{17}$							
Richt-pfenning								

D.

Eintheilung des holländischen Troygewichtes.

Mark	Unzen	Engel	Fier-ling	Trois-ken	Deurs-ken	Aß
1 Mark	8	160	640	1280	2560	5120
1 Unze		20	80	160	320	640
1 Engel			4	8	16	32
1 Fierling				2	4	8
1 Troiske					2	4
1 Deurske						2
						Aß

E.

Eintheilnng des französischen Troygewichtes

Poids de Marc.

Marc	Once	Gros	Denier	Grain	Primes ou Carrobes
1 Marc	8	64	192	4608	110592
1 Once		8	24	576	13824
1 Gros			3	72	1728
1 Denier				24	576
1 Grain					24
					Primes

I. **Anmerkung.** Das ehemalige franz. bürgerliche Handelsgewicht enthielt die nemlichen Eintheilungen, so daß ein Pfund oder 1 Livre aus 2 Marcs, 16 Onces, 128 Gros. 384 Deniers, 9216 Grains, 221184 Primes bestand.

II.

II. Anmerkung. Das Troygewicht bekam den Namen von Troyes in Champagne, wo ehedem sehr ansehnliche Jahrmärkte gehalten wurden, die Mark war anfänglich in Frankreich und Holland gleich; das holl. Troygewicht wird seit langer Zeit als Maaßstab gebraucht, nach welchen die an andern Orten eingeführte Gewichte miteinander verglichen werden.

F.

Bestimmung verschiedener Gewichte nach holl. Asen Troygew.

Namen der Länder und Oerter.	Holl. Asen Troygew.	Logarithmus.	
Amsterdam ℔ Handelsgew.	10280	4,0111931	a
℔ Troygew. zu 16 Unzen .	10240	4,0103000	a
℔ Apothekergew. zu 12 Unz.	7680	3,8853612	a
Münzgew. Mark zu 8 Unz.	5120	3,7092700	a
Augsburg ℔ Frohn = oder Schwergewicht . .	10220	4,0094509	a
. . . . .	10214	4,0091959	o
℔ Kramer = oder Leichtgew.	9836	3,9628185	a
. . . . .	9830,5	3,9925756	o
Mark Münzgew. zu 8 Unz.	4912	3,6912584	a
. . . . .	4909,12	3,6910037	o
Baiern ℔ Handelsgewicht	11682	4,0675172	
℔ Nürnberg. oder deutsches Apothekergew. .	7443,9	3,8718005	a
Mark Münzgew. oder Cölner Mark	4870	3,6875290	
Bayreuth ℔ Handelsgew.	10608	4,0256335	e
Berlin u. in den preußischen Staaten ℔ Handelsgew.	9747	3,9888710	f

Namen der Länder und Oerter.	Holl. Asen Troygew.	Logarithmus.	
Berlin ℔ Apothekergewicht	7438	3,8714562	f
Mark Münzgewicht . .	4864	3,6869936	f
Engelland ℔ Königsgewicht	14162	4,1511246	a
℔ Avoir du poids . .	9441	3,9750180	a
℔ Troygew. zu 12 Unzen	7766	3,8901974	a
Eichstädt ℔ Handelsgew.	10610	4,0257154	g
Frankfurt am Mayn			
℔ Centnergewicht . .	10595	4,0251010	a
℔ Handelsgewicht . .	9720	3,9876663	a
Frankreich altes ℔ Poids de			
Marc	10188	4,008088	a
. . . . .	10183	4,0078757	f
altes Münzgew. Mark .	5094	3,7070589	a
neues Gewicht Gramme	20,8128	1,3183305	i
Décigramme = 0,1 Gram.	2,08128	0,3183305	i
Décagramme = 10 Gram.	208,128	2,3183305	i
Hamburg ℔ Handelsgew.	10080	4,0034605	a
Leipzig ℔ Handelsgewicht	9716	3,9874875	a
Nürnberg ℔ Handelsgew.	10610	4,0257154	a
Mark Münzgewicht . .	4962,6	3,6957093	a
Regensburg ℔ Handelsg.	11804	4,0720292	m
Mark Münzgewicht . . .	5118	3,7091003	m
Salzburg ℔ Handelsgew.	11655,43	4,0665284	n
Tyrol ℔ Handelsgew. . .	11716	4,0687794	a
Wien ℔ $\frac{6}{5}$ Handelsgewicht .	11655,43	4,0665284	a
℔ Apothekergew. zu 12 Unz.	8741,57	3,9415894	a
Mark Münzgew. = $\frac{6}{5}$ Cöllner Mark	5841	3,7664872	a

I. **Anmerkung.** Die in der letzten Spalte enthaltenen Buchstaben geben die in der Tabelle C. im Längenmaaße angeführten Quellen an.

II.

II. **Anmerkung zu** p. Brander in Augsburg untersuchte die Augsburgischen Gewichte, und gab ihre Bestimmungen in einer Tabelle 1753 heraus, aus welcher ich die Angaben berechnete.

G.

Uebersicht der neuen franz. Maaße u. Gewichte.

1. Den neuesten Vermessungen gemäß hält ein Quadrant eines Mittagkreises 30784440 Pariser Fuß, folglich der 100ste Theil, oder Centesimalgrad 307844,4 Pariser Fuß.

2. Als allgemeines Längenmaaß ist der 0,00001 Centesimalgrad angenommen, und heißt Mètre; das Mètre hält also 3,078444 Pariser Fuß; um größere Längen zu bestimmen, dienen
   a. der Décamètre = 10 mètres,
   b. der Hectomètre = 100 mètres,
   c. der Kiliomètre = 1000 mètres;

   zu kleinern Längebestimmungen dienen als Maaße
   a. der Décimètre = 0,1 mètre
   b. der Centimètre = 0,01 mètre u. s. f.

3. Hundert Quadrat Mètres geben das allgemeine Flächenmaaß, welches Are heißt, aus welchen wieder für sich einleuchtet, was Décare, Hectare, und eben so Déciare, Centiare in Rücksicht von Are sagen wollen.

4. Der Cubus vom Décimètre, oder 0,001 cubische Mètres bestimmen das Frucht- und Körpermaaß Litre.

5. Der

5. Der Cubus eines Mètre = 29,173852 Pariser Cubikfuß ist das neue französische Holzmaaß, und heißt Stère.

6. Nach den neuesten Versuchen wog ein Cubik mètre destillirten Wassers im luftleeren Raume bey seiner größten Dichtigkeit (l'eau étant amenée au *maximum* de sa densité et dans le vide) 2042 Livres 14 Onc. 0 Gros. Nach Hrn. Zachs geogr. Ephemeriden ist der größte Grad der Dichtigkeit vom Wasser beym 3,2° Grade des Queckſilbertherm. und reaumürischer Scale.

7. Dieses Gewicht eines Cubik-Mètre destilirten Wassers heißt Bar, und das Gewicht eines Cubik céntimètre heißt Gramme, welches also 18,82715 Grans hält, und als Maaß aller Gewichte angenommen wird.

Anmerkung. Diese Angaben sind aus Brisson Instruction sur le Mesures et Poids nouveaux. An. VIII gezogen, und bey der Reduction der Gewichte auf holländische Asen nahm ich nach Hrn. Vega an, daß das ehemalige ℔ Poids de Marc 10188 holl. Asen halte.

III. Abtheilung.

Von Münzen.

A.

Erklärungen von Münzen überhaupt.

1. Silber mit Kupfer, und Gold mit Silber, oder beyden zugleich legiren, oder beschicken, heißt solche Metalle zusammenschmelzen.

2. Feines Gold, oder Silber wird jenes genannt, welches keinen Zusatz von einem andern Metalle enthält; da nun die Mark Gold in 24 Karath, und die Mark Silber in 16 Loth getheilet wird, so heißt

a. 23 oder 18 karathiges Gold jedes Stück, von welchem 23 oder 18 Theile fein Gold, und die übrigen 1 oder 6 Theile fremdartiges Metall enthalten, und man drückt den feinen Gehalt durch $\frac{23}{24}$ oder $\frac{18}{24}$ aus.

b. 12 oder 14 löthiges Silber heißt jedes Silber, von welchem 12, oder 14 Theile rein Silber, und die übrigen 4 oder 2 Theile aus fremdartigem Metalle bestehen; man bezeichnet dieses mit $\frac{12}{16}$ oder $\frac{14}{16}$ u. s. f.

3. Man unterscheidet

a. reelle oder gangbare Münzen, das ist, wirklich geprägte Geldstücke, z. B. Ducaten, Conventionsthaler u. s. w.

b. fin-

b. fingirte, oder Rechnungsmünzen, wodurch als Maaßstab der Werth der Dinge, und selbst der geprägten Münzen bestimmet wird; z. B. in Deutschland der Gulden, in Engelland das Pfund Sterling u. s. f.

4. Um den Werth der reellen Münzen nach fingirten zu bestimmen, kömt es

a. auf die Beschaffenheit, und

b. das Gewicht des in einer Münze enthaltenen Metalles an.

5. Das Gewicht des in einer Münze enthaltenen Metalles zu bestimmen, braucht man in ganz Deutschland das Cöllner Markgewicht, man nennet daher

a. eine Mark vom feinen Golde oder Silber eine feine Mark, oder eine Markfein,

b. eine Mark des beschickten edlern Metalles eine rauche Mark, oder eine Markrauch.

6. Ferner heißt

a. das Gewicht einer Münzsorte ihr Schrot,

b. der Gehalt der Münze am edlern Metalle das Korn,

c. das Gesez, wodurch Schrot, Korn, und der Kaufwerth einer Münze bestimmet wird, der Münzfuß.

7. Die im Deutschlande merkwürdigsten Münzfuße sind.

A. im

A. im Golde

a. Der Rheinische Goldguldenfuß 72 Stück auf die rauhe Mark von 18 Karath 6 Grän Gold, und 3 Karath Silber; nach diesem Fuße sind die baierischen Karolinen und Max'ors gepräget.

b. Der Ducatenfuß, 67 Stück auf die feine Mark von 23 Karath 8 Grän Gold, und 2 Grän Silber.

B. in Silber

a. Der alte Reichsfuß von 1566 auf dem Reichstage zu Augsburg, 8 Reichsthaler auf die rauhe, und 9 auf die feine Mark.

b. Der Leipziger, oder 18 Guldenfuß, 1690 zu Leipzig, die feine Mark Silber zu 12 Reichsthaler oder 18 Fl. Dieser Fuß wurde 1738 zum allgemeinen Reichsfuße angenommen, ist aber dermal nur von Churbraunschweig noch beybehalten.

c. Der Graumannische, oder 21 Guldenfuß, 1750 von Preußen angenommen, und 1764 erneuert. Die feine Mark Silber auf 14 Reichsthaler oder 21 Fl.

d. Der Conventions- oder 20 Guldenfuß, die feine Mark zu $13\frac{1}{3}$ Thaler, oder 20 Gulden, nach diesem Fuße werden dermal in östreichischen, baierischen, sächsischen Staaten, so wie im schwäbischen, fränkischen, ober- und niederrheinischen Kreisen die Silbermünzen geprägt, aber nur in östreichischen und sächsischen Landen cursiren sie

nach

nach eben diesem Fuße; in den übrigen genannten Ländern cursiren solche nach

e. dem 24 Guldenfuß, nemlich die feine Mark Silber zu 16 Reichsthaler, 24 Gulden, oder 10 Conventionsthaler.

B. Baierische Geldrechnung in gewöhnlicher oder weißer Münze.

Gulden	Batzen	Groschen	Kreutzer	Pfenning	Häller
1 Gulden	15	20	60	240	480
1 Batzen		$1\frac{1}{3}$	4	16	32
1 Groschen			3	12	24
1 Kreutzer				4	8
1 Pfenning					2
Häller					

C. Baierische Geldrechnung in schwarzer Münze.

Pfund Pfenning	Schilling	Pfenning	Häller	Betragen an weißer Münze fl.	kr.	pf.	hl
1 Pfund Pfenning	8	240	480	1	8	2	—
1 Schilling		30	60	—	8	2	$\frac{4}{7}$
1 Pfenning			2	—	—	1	$\frac{2}{7}$
Häller				—	—	—	$1\frac{1}{7}$

D.

Verhältniß verschiedener Rechnungs-Münzen.

Rechnungs-Münzen verschiedener Länder.	Innerer Gehalt in holländ. Asen Troygew.		Werth in 24 Guldenfuß.			
	in Gold	in Silb.	fl.	kr.	pf.	hl.
Baiern und im Reiche nach dem 24 Guldenfuß.						
Gulden .	14/8	202/66	1	—	—	—
Reichsthaler .	22/2	304/00	1	30	—	—
Oestreich nach dem Conventionsfuß.						
Kaisergulden . .	17/29	243/2	1	12	—	—
Sachsen Reichsthal. nach d. Convent. Fuß						
zu 24 Groschen . .	25/50	364/8	1	48	—	—
Preußen Thaler nach						
21 Guldenfuß . .	24/00	347/43	1	42	3	1
Gulden = 1/3 Thaler	8/00	115/81	—	34	1	1/3
Engelland Pf. Sterl.						
Schilling oder 240 Pence	149/0	2286/5	11	17	—	—
Frankreich 1 *Livre* zu			—	27	2	—
20 *Sous tournois*, oder	5/79	91/3	—	27	—	—
240 *Deniers* . . .						
Neue Münze *Franc*.	— —	93/6576	—	27	3	—
Portugall *Millerées*						
= 1000 *Rées* . .	42/175	563/52	2	46	3	1/2
Rußland Rubel zu						
100 **Kopeken** . .	27/95	374/15	1	50	3	—
Spanien *Real* od. *Réal*						
de Vellon = 34 *Maravedis*	1/6	25	—	7	1	1 16/76
Piastre (Peso duro),						
= 20 *Réal* . .	32	500	2	28	—	—
Pistole (Dublon) =						
80 Réal . . .	128	2000	9	52	—	—

Rechnungs-Münzen verschiedener Länder.	Innerer Gehalt in holländ. Asen Troygew.	Werth an 24 Guldenfuß.

Real, Piastre, und Pistole sind zugleich reelle Münzen.	in Gold	in Silb	fl.	kr.	pf.	hl.
Türkey *Piastre* = 40 *Paras* = 100 gute *Asper* = 120 *Curant Asper*		185/3	—	54	3	1
Beutel (Keser) 500 Piastr.						
Beutel Gold (Kitze) = 30000 Piastr.						

Anmerkung. Die Angaben sind größtentheils nach Grüsons Tabellen in seinem Grundrisse, und seiner vollständigen Anleitung zur Mathematik bestimmt, damit verglich ich Nelkenbrechers Tabellen: die Bestimmung der Francs ist nach Hrn. Beigels Angabe.

E. Verwandlung der sächsischen Geldrechnung in die baierische, und umgekehrt.

Sächs. Geld	beträgt nach baier. Gelde			
	fl.	kr.	pf	hl
1 Pfenning	—	—	1	1
2 Pfenning	—	—	3	—
2 Pfenning	—	1	—	1
4 Pfenning	—	1	2	—
1 Groschē	—	4	2	—
2 Groschē	—	9	—	—
12 Gr. = ½ Thl.	—	54	—	—
24 Gr. = Thal.	1	48	—	—

Baierisches Geld	beträgt nach sächs. Gelde		
	Thl	Gr.	pf
1 kr. . .	—	—	$2\frac{2}{3}$
2 kr. . .	—	—	$5\frac{1}{3}$
3 kr. . .	—	—	8
12 kr. . .	—	2	8
24 kr. . .	—	5	4
30 kr. = ½ fl.	—	6	8
60 kr. = 1 fl.	—	13	4
90 kr. = Rthl.	—	20	—
1 Spec. Thlr.	1	8	—

F. Verwandlung der preußischen Geldrechnung in die baierische, und umgekehrt.

Preuß. Geld	beträgt nach baier. Gelde			
	fl.	kr.	pf	hl.
1 Pfenning	—	—	1	1
2 Pfenning	—	—	3	—
12 Pfen. = 1 Gr.	—	4	1	$\frac{1}{4}$
12 Gr. = $\frac{1}{2}$ Thlr.	—	51	1	$1\frac{1}{2}$
24 Gr. = 1 Thlr.	1	42	3	1

Baier. Geld	beträgt im preuß. Gelde		
	Thl	Gr.	Pfen
1 Pfenning	—	—	$\frac{2}{3}$
1 Kr.	—	—	$2\frac{110}{137}$
12 Kr.	—	2	$10\frac{1}{2}$
14 Kr.	—	5	9
60 Kr. = 1 Fl.	—	13	1

G. Verhältniß des baierischen und Kaisergeldes.

Da man in baierischen sowohl, als östreichischen oder kaiserlichen Ländern nach Gulden, Groschen, Kreutzer, und zwar nach der nemlichen Unterabtheilung rechnet, nur mit dem Unterschiede, daß in Baiern der 24 Gulden- in Oestreich aber der 20 Guldenfuß gilt, so ist

baierisch Geld: Kaisergeld = 20 : 24 = 5 : 6, mithin

z. B. 6 baier. Gulden = 5 Kaisergulden.

H. Wirk-

H. Wirkliche vorzüglich baierische Goldmünzen.

Namen der Münze	Stück auf 1 rauhe Mark.	Stück auf die feine Mark.	Schrott an holl. Asen.	Korn an holl. Asen Troyg.	dermal Curant werth. fl.	kr.
Baierische Dukaten .	67	$67\frac{67}{71}$	72,69	71,68	5	20
Carolin .	24	$31\frac{5}{37}$	202,92	156,41	11	24
Maxd'or .	36	$46\frac{26}{37}$	135,28	104,30	7	20
Französische alte Schild= Louisd'or	28,6	$31\frac{37}{65}$	170,28	153,73	11	—
neue seit 1786. .	30	$33\frac{3}{13}$	162,5	146,70	10	30
Oestreichis. Souveraind'or	$21\frac{67}{777}$	$21\frac{6089}{22533}$	234,62	215,07	16	—

Anmerkung. Kaiserliche, Kremnitzer, Holländer, Salzburger, und alle vollgewichtige Reichsducaten sind an Werth den baierischen gleich; — die päpstlichen Ducaten aber gelten nur 5 fl. 8 kr. Ein Florentiner Ducate gilt 5 fl. 14 kr.

I. Baierische Silbermünzen nach dem Conventionsfuß.

Namen der Münze.	Stück auf 1 rauhe Mark:	Stück auf d. feine Mark	Schrott an holl. Asen Troygew.	Korn an holl. Asen.	Werth nach d. 24 fl. Fuß. fl.	kr.
Ganze Convent. Thlr.	$8\frac{1}{3}$	10	584,4	487	2	24
Halbe Conv. Thaler .	$16\frac{2}{3}$	20	292,2	243,5	1	12
20 Kr. Stück	35	60	139,14	81,166 ...	—	24
10 Kr. Stück	60	120	81,166 ...	40,583	—	12

Außer diesen werden noch in Silber Sechskreutzer= Groschen= und Kreutzerstücke; in Kupfer Pfenning und Häller gepräget.

Ta=

Tabelle

der gemeinen, oder briggischen Logarithmen aller natürlichen Zahlen von 1 bis 1000.

N.	Log.	N.	Log.	N.	Log.	N.	Log.
0	inf. neg.	30	1,4771213	60	1,7781513	90	1,9542425
1	0,0000000	31	1,4913617	61	1,7853298	91	1,9590414
2	0,3010300	32	1,5051500	62	1,7923917	92	1,9637878
3	0,4771213	33	1,5185139	63	1,7993405	93	1,9684829
4	0,6020600	34	1,5314789	64	1,8061800	94	1,9731279
5	0,6989700	35	1,5440680	65	1,8129134	95	1,9777236
6	0,7781513	36	1,5563025	66	1,8195439	96	1,9822712
7	0,8450980	37	1,5682017	67	1,8260748	97	1,9867717
8	0,9030900	38	1,5797836	68	1,8325089	98	1,9912261
9	0,9542425	39	1,5910646	69	1,8388491	99	1,9956352
10	1,0000000	40	1,6020600	70	1,8450980	100	2,0000000
11	1,0413927	41	1,6127839	71	1,8512583	101	2,0043214
12	1,0791812	42	1,6232493	72	1,8573325	102	2,0086002
13	1,1139434	43	1,6334685	73	1,8633229	103	2,0128372
14	1,1461280	44	1,6434527	74	1,8692317	104	2,0170333
15	1,1760913	45	1,6532125	75	1,8750613	105	2,0211893
16	1,2041200	46	1,6627578	76	1,8808136	106	2,0253059
17	1,2304489	47	1,6720979	77	1,8864907	107	2,0293838
18	1,2552725	48	1,6812412	78	1,8920946	108	2,0334238
19	1,2787536	49	1,6901961	79	1,8976271	109	2,0374265
20	1,3010300	50	1,6989700	80	1,9030900	110	2,0413927
21	1,3222193	51	1,7075702	81	1,9084850	111	2,0453230
22	1,3424227	52	1,7160033	82	1,9138139	112	2,0492180
23	1,3617278	53	1,7242759	83	1,9190781	113	2,0530784
24	1,3802112	54	1,7323938	84	1,9242793	114	2,0569049
25	1,3979400	55	1,7403627	85	1,9294189	115	2,0606978
26	1,4149733	56	1,7481880	86	1,9344985	116	2,0644580
27	1,4313638	57	1,7558749	87	1,9395193	117	2,0681859
28	1,4471580	58	1,7634280	88	1,9444827	118	2,0718820
29	1,4623980	59	1,7708520	89	1,9493900	119	2,0755470
N.	Log.	N.	Log.	N.	Log.	N.	Log.

N.	Log.	N.	Log.	N.	Log.	N.	Log.
120	2,0791812	155	2,1903317	190	2,2787536	225	2,3521825
121	2,0827854	156	2,1931246	191	2,2810334	226	2,3541084
122	2,0863598	157	2,1958997	192	2,2833012	227	2,3560259
123	2,0899051	158	2,1986571	193	2,2855573	228	2,3579348
124	2,0934217	159	2,2013971	194	2,2878017	229	2,3598355
125	2,0969100	160	2,2041200	195	2,2900346	230	2,3617278
126	2,1003705	161	2,2068259	196	2,2922561	231	2,3636120
127	2,1038037	162	2,2095150	197	2,2944662	232	2,3654880
128	2,1072100	163	2,2121876	198	2,2966652	233	2,3673559
129	2,1105897	164	2,2148438	199	2,2988531	234	2,3692159
130	2,1139434	165	2,2174839	200	2,3010300	235	2,3710679
131	2,1172713	166	2,2201081	201	2,3031961	236	2,3729120
132	2,1205739	167	2,2227165	202	2,3053514	237	2,3747483
133	2,1238516	168	2,2253093	203	2,3074960	238	2,3765770
134	2,1271048	169	2,2278867	204	2,3096302	239	2,3783979
135	2,1303338	170	2,2304489	205	2,3117539	240	2,3802112
136	2,1335389	171	2,2329961	206	2,3138672	241	2,3820170
137	2,1367206	172	2,2355284	207	2,3159703	242	2,3838154
138	2,1398791	173	2,2380461	208	2,3180633	243	2,3856063
139	2,1430148	174	2,2405492	209	2,3201463	244	2,3873898
140	2,1461280	175	2,2430380	210	2,3222193	245	2,3891661
141	2,1492191	176	2,2455127	211	2,3242825	246	2,3909351
142	2,1522883	177	2,2479733	212	2,3263359	247	2,3926970
143	2,1553360	178	2,2504200	213	2,3283796	248	2,3944517
144	2,1583625	179	2,2528530	214	2,3304138	249	2,3961993
145	2,1613680	180	2,2552725	215	2,3324385	250	2,3979400
146	2,1643529	181	2,2576786	216	2,3344538	251	2,3996737
147	2,1673173	182	2,2600714	217	2,3364597	252	2,4014005
148	2,1702617	183	2,2624511	218	2,3384565	253	2,4031205
149	2,1731863	184	2,2648178	219	2,3404441	254	2,4048337
150	2,1760913	185	2,2671717	220	2,3424227	255	2,4065402
151	2,1789769	186	2,2695129	221	2,3443923	256	2,4082400
152	2,1818436	187	2,2718416	222	2,3463530	257	2,4099331
153	2,1846914	188	2,2741578	223	2,3483049	258	2,4116197
154	2,1875207	189	2,2764618	224	2,3502480	259	2,4132998

N.	Log.	N.	Log.	N.	Log.	N.	Log.

N.	Log.	N.	Log.	N.	Log.	N.	Log.
260	2,4149733	295	2,4698220	330	2,5185139	365	2,5622929
261	2,4166405	296	2,4712917	331	2,5198280	366	2,5634811
262	2,4183013	297	2,4727564	332	2,5211381	367	2,5646661
263	2,4199557	298	2,4742163	333	2,5224442	368	2,5658478
264	2,4216039	299	2,4756712	334	2,5237465	369	2,5670264
265	2,4232459	300	2,4771213	335	2,5250448	370	2,5682017
266	2,4248816	301	2,4785665	336	2,5263393	371	2,5693739
267	2,4265113	302	2,4800069	337	2,5276299	372	2,5705429
268	2,4281348	303	2,4814426	338	2,5289167	373	2,5717088
269	2,4297523	304	2,4828736	339	2,5301997	374	2,5728716
270	2,4313638	305	2,4842998	340	2,5314789	375	2,5740313
271	2,4329693	306	2,4857214	341	2,5327544	376	2,5751878
272	2,4345689	307	2,4871384	342	2,5340261	377	2,5763414
273	2,4361626	308	2,4885507	343	2,5352941	378	2,5774918
274	2,4377506	309	2,4899585	344	2,5365584	379	2,5786392
275	2,4393327	310	2,4913617	345	2,5378191	380	2,5797836
276	2,4409091	311	2,4927604	346	2,5390761	381	2,5809250
277	2,4424798	312	2,4941546	347	2,5403295	382	2,5820634
278	2,4440448	313	2,4955443	348	2,5415792	383	2,5831988
279	2,4456042	314	2,4969296	349	2,5428254	384	2,5843312
280	2,4471580	315	2,4983106	350	2,5440680	385	2,5854607
281	2,4487063	316	2,4996871	351	2,5453071	386	2,5865873
282	2,4502491	317	2,5010593	352	2,5465427	387	2,5877110
283	2,4517864	318	2,5024271	353	2,5477747	388	2,5888317
284	2,4533183	319	2,5037907	354	2,5490033	389	2,5899496
285	2,4548449	320	2,5051500	355	2,5502284	390	2,5910646
286	2,4563660	321	2,5065050	356	2,5514500	391	2,5921768
287	2,4578819	322	2,5078559	357	2,5526682	392	2,5932861
288	2,4593925	323	2,5092025	358	2,5538830	393	2,5943926
289	2,4608978	324	2,5105450	359	2,5550944	394	2,5954962
290	2,4623980	325	2,5118834	360	2,5563025	395	2,5965971
291	2,4638930	326	2,5132176	361	2,5575072	396	2,5976952
292	2,4653829	327	2,5145478	362	2,5587086	397	2,5987905
293	2,4668676	328	2,5158738	363	2,5599066	398	2,5998831
294	2,4683473	329	2,5171959	364	2,5611014	399	2,6009729

N.	Log.	N.	Log.	N.	Log.	N.	Log.

N.	Log.	N.	Log.	N.	Log.	N.	Log.
400	2,6020600	435	2,6384893	470	2,6720979	505	2,7032914
401	2,6031444	436	2,6394865	471	2,6730209	506	2,7041505
402	2,6042261	437	2,6404814	472	2,6739420	507	2,7050080
403	2,6053050	438	2,6414741	473	2,6748611	508	2,7058637
404	2,6063814	439	2,6424645	474	2,6757783	509	2,7067178
405	2,6074550	440	2,6434527	475	2,6766936	510	2,7075702
406	2,6085260	441	2,6444386	476	2,6776070	511	2,7084209
407	2,6095944	442	2,6454223	477	2,6785184	512	2,7092700
408	2,6106602	443	2,6464037	478	2,6794279	513	2,7101174
409	2,6117233	444	2,6473830	479	2,6803355	514	2,7109631
410	2,6127839	445	2,6483600	480	2,6812412	515	2,7118072
411	2,6138418	446	2,6493349	481	2,6821451	516	2,7126497
412	2,6148972	447	2,6503075	482	2,6830470	517	2,7134905
413	2,6159501	448	2,6512780	483	2,6839471	518	2,7143298
414	2,6170003	449	2,6522463	484	2,6848454	519	2,7151674
415	2,6180481	450	2,6532125	485	2,6857417	520	2,7160033
416	2,6190933	451	2,6541765	486	2,6866363	521	2,7168377
417	2,6201361	452	2,6551384	487	2,6875290	522	2,7176705
418	2,6211763	453	2,6560982	488	2,6884198	523	2,7185017
419	2,6222140	454	2,6570559	489	2,6893089	524	2,7193313
420	2,6232493	455	2,6580114	490	2,6901961	525	2,7201593
421	2,6242821	456	2,6589648	491	2,6910815	526	2,7209857
422	2,6253125	457	2,6599162	492	2,6919651	527	2,7218106
423	2,6263404	458	2,6608655	493	2,6928469	528	2,7226339
424	2,6273659	459	2,6618127	494	2,6937269	529	2,7234557
425	2,6283889	460	2,6627578	495	2,6946052	530	2,7242759
426	2,6294096	461	2,6637009	496	2,6954817	531	2,7250945
427	2,6304279	462	2,6646420	497	2,6963564	532	2,7259116
428	2,6314438	463	2,6655810	498	2,6972293	533	2,7267272
429	2,6324573	464	2,6665180	499	2,6981005	534	2,7275413
430	2,6334685	465	2,6674530	500	2,6989700	535	2,7283538
431	2,6344773	466	2,6683859	501	2,6998377	536	2,7291648
432	2,6354837	467	2,6693169	502	2,7007037	537	2,7299743
433	2,6364879	468	2,6702459	503	2,7015680	538	2,7307823
434	2,6374897	469	2,6711728	504	2,7024305	539	2,7315888

N.	Log.	N.	Log.	N.	Log.	N.	Log.

N.	Log.	N.	Log.	N.	Log.	N.	Log.
540	2,7323938	575	2,7596678	610	2,7853298	645	2,8095597
541	2,7331973	576	2,7604225	611	2,7860412	646	2,8102325
542	2,7339993	577	2,7611758	612	2,7867514	647	2,8109043
543	2,7347998	578	2,7619278	613	2,7874605	648	2,8115750
544	2,7355989	579	2,7626786	614	2,7881684	649	2,8122447
545	2,7363965	580	2,7634280	615	2,7888751	650	2,8129134
546	2,7371926	581	2,7641761	616	2,7895807	651	2,8135810
547	2,7379873	582	2,7649230	617	2,7902852	652	2,8142476
548	2,7387806	583	2,7656686	618	2,7909885	653	2,8149132
549	2,7395723	584	2,7664128	619	2,7916906	654	2,8155777
550	2,7403627	585	2,7671559	620	2,7923917	655	2,8162413
551	2,7411516	586	2,7678976	621	2,7930916	656	2,8169038
552	2,7419391	587	2,7686381	622	2,7937904	657	2,8175654
553	2,7427251	588	2,7693773	623	2,7944880	658	2,8182259
554	2,7435098	589	2,7701153	624	2,7951846	659	2,8188854
555	2,7442930	590	2,7708520	625	2,7958800	660	2,8195439
556	2,7450748	591	2,7715875	626	2,7965743	661	2,8202015
557	2,7458552	592	2,7723217	627	2,7972675	662	2,8208580
558	2,7466342	593	2,7730547	628	2,7979596	663	2,8215135
559	2,7474118	594	2,7737864	629	2,7986506	664	2,8221681
560	2,7481880	595	2,7745170	630	2,7993405	665	2,8228216
561	2,7489629	596	2,7752463	631	2,8000294	666	2,8234742
562	2,7497363	597	2,7759743	632	2,8007171	667	2,8241258
563	2,7505084	598	2,7767012	633	2,8014037	668	2,8247765
564	2,7512791	599	2,7774268	634	2,8020893	669	2,8254261
565	2,7520484	600	2,7781513	635	2,8027737	670	2,8260748
566	2,7528164	601	2,7788745	636	2,8034571	671	2,8267225
567	2,7535831	602	2,7795965	637	2,8041394	672	2,8273693
568	2,7543483	603	2,7803173	638	2,8048207	673	2,8280151
569	2,7551123	604	2,7810369	639	2,8055009	674	2,8286599
570	2,7558749	605	2,7817554	640	2,8061800	675	2,8293038
571	2,7566361	606	2,7824726	641	2,8068580	676	2,8299467
572	2,7573960	607	2,7831887	642	2,8075350	677	2,8305887
573	2,7581546	608	2,7839036	643	2,8082110	678	2,8312297
574	2,7589119	609	2,7846173	644	2,8088859	679	2,8318698

N.	Log.	N.	Log.	N.	Log.	N.	Log.

N.	Log.	N.	Log.	N.	Log.	N.	Log.
680	2,8325089	715	2,8543060	750	2,8750613	785	2,8948697
681	2,8331471	716	2,8549130	751	2,8756399	786	2,8954225
682	2,8337844	717	2,8555192	752	2,8762178	787	2,8959747
683	2,8344207	718	2,8561244	753	2,8767950	788	2,8965262
684	2,8350561	719	2,8567289	754	2,8773713	789	2,8970770
685	2,8356906	720	2,8573325	755	2,8779470	790	2,8976271
686	2,8363241	721	2,8579353	756	2,8785218	791	2,8981765
687	2,8369567	722	2,8585372	757	2,8790959	792	2,8987252
688	2,8375884	723	2,8591383	758	2,8796692	793	2,8992732
689	2,8382192	724	2,8597386	759	2,8802418	794	2,8998205
690	2,8388491	725	2,8603380	760	2,8808136	795	2,9003671
691	2,8394780	726	2,8609366	761	2,8813847	796	2,9009131
692	2,8401061	727	2,8615344	762	2,8819550	797	2,9014583
693	2,8407332	728	2,8621314	763	2,8825245	798	2,9020029
694	2,8413595	729	2,8627275	764	2,8830934	799	2,9025468
695	2,8419848	730	2,8633229	765	2,8836614	800	2,9030900
696	2,8426092	731	2,8639174	766	2,8842283	801	2,9036325
697	2,8432328	732	2,8645111	767	2,8847954	802	2,9041744
698	2,8438554	733	2,8651040	768	2,8853612	803	2,9047155
699	2,8444772	734	2,8656961	769	2,8859263	804	2,9052560
700	2,8450980	735	2,8662873	770	2,8864907	805	2,9057959
701	2,8457180	736	2,8668778	771	2,8870544	806	2,9063350
702	2,8463371	737	2,8674675	772	2,8876173	807	2,9068735
703	2,8469553	738	2,8680564	773	2,8881795	808	2,9074114
704	2,8475727	739	2,8686444	774	2,8887410	809	2,9079485
705	2,8481891	740	2,8692317	775	2,8893017	810	2,9084850
706	2,8488047	741	2,8698182	776	2,8898617	811	2,9090209
707	2,8494194	742	2,8704039	777	2,8904210	812	2,9095560
708	2,8500333	743	2,8709888	778	2,8909796	813	2,9100905
709	2,8506462	744	2,8715729	779	2,8915375	814	2,9106244
710	2,8512583	745	2,8721563	780	2,8920946	815	2,9111576
711	2,8518696	746	2,8727388	781	2,8926510	816	2,9116902
712	2,8524800	747	2,8733206	782	2,8932068	817	2,9122221
713	2,8530895	748	2,8739016	783	2,8937618	818	2,9127533
714	2,8536982	749	2,8744818	784	2,8943161	819	2,9132839

N.	Log.	N.	Log.	N.	Log.	N.	Log.

N.	Log.	N.	Log.	N.	Log.	N.	Log.
820	2,9138139	855	2,9319661	890	2,9493900	925	2,9661417
821	2,9143432	856	2,9324738	891	2,9498777	926	2,9666110
822	2,9148718	857	2,9329808	892	2,9503649	927	2,9670797
823	2,9153998	858	2,9334873	893	2,9508515	928	2,9675480
824	2,9159272	859	2,9339932	894	2,9513375	929	2,9680157
825	2,9164539	860	2,9344985	895	2,9518230	930	2,9684829
826	2,9169800	861	2,9350032	896	2,9523080	931	2,9689497
827	2,9175055	862	2,9355073	897	2,9527924	932	2,9694159
828	2,9180303	863	2,9360108	898	2,9532763	933	2,9698816
829	2,9185545	864	2,9365137	899	2,9537597	934	2,9703469
830	2,9190781	865	2,9370161	900	2,9542425	935	2,9708116
831	2,9196010	866	2,9375179	901	2,9547248	936	2,9712758
832	2,9201233	867	2,9380191	902	2,9552065	937	2,9717396
833	2,9206450	868	2,9385197	903	2,9556878	938	2,9722028
834	2,9211661	869	2,9390198	904	2,9561684	939	2,9726656
835	2,9216865	870	2,9395193	905	2,9566486	940	2,9731279
836	2,9222063	871	2,9400182	906	2,9571282	941	2,9735896
837	2,9227255	872	2,9405165	907	2,9576073	942	2,9740509
838	2,9232440	873	2,9410142	908	2,9580858	943	2,9745117
839	2,9237620	874	2,9415114	909	2,9585639	944	2,9749720
840	2,9242793	875	2,9420081	910	2,9590414	945	2,9754318
841	2,9247960	876	2,9425041	911	2,9595184	946	2,9758911
842	2,9253121	877	2,9429996	912	2,9599948	947	2,9763500
843	2,9258276	878	2,9434945	913	2,9604708	948	2,9768083
844	2,9263424	879	2,9439889	914	2,9609462	949	2,9772662
845	2,9268567	880	2,9444827	915	2,9614211	950	2,9777236
846	2,9273704	881	2,9449759	916	2,9618955	951	2,9781805
847	2,9278834	882	2,9454686	917	2,9623693	952	2,9786369
848	2,9283959	883	2,9459607	918	2,9628427	953	2,9790929
849	2,9289077	884	2,9464523	919	2,9633155	954	2,9795484
850	2,9294189	885	2,9469433	920	2,9637878	955	2,9800034
851	2,9299296	886	2,9474337	921	2,9642596	956	2,9804579
852	2,9304396	887	2,9479236	922	2,9647309	957	2,9809119
853	2,9309490	888	2,9484130	923	2,9652017	958	2,9813655
854	2,9314579	889	2,9489018	924	2,9656720	959	2,9818186

N.	Log.	N.	Log.	N.	Log.	N.	Log.

N.	Log.	N.	Log.	N.	Log.	N.	Log.
960	2,9822712	970	2,9867717	980	2,9912261	990	2,9956352
961	2,9827234	971	2,9872192	981	2,9916690	991	2,9960737
962	2,9831751	972	2,9876663	982	2,9921115	992	2,9965117
963	2,9836263	973	2,9881128	983	2,9925535	993	2,9969492
964	2,9840770	974	2,9885590	984	2,9929951	994	2,9973864
965	2,9845273	975	2,9890046	985	2,9934362	995	2,9978231
966	2,9849771	976	2,9894498	986	2,9938769	996	2,9982593
967	2,9854265	977	2,9898946	987	2,9943172	997	2,9986952
968	2,9858754	978	2,9903389	988	2,9947569	998	2,9991305
969	2,9863238	979	2,9907827	989	2,9951963	999	2,9995655

N.	Log.	N.	Log.	N.	Log.	N.	Log.

Verzeichniß der Druckfehler.

Seite	Zeile	Statt	lies
6	15	Katoptcik	Katoptrik
9	10	Lehrsätze	Lehnsätze
11	3	soll stehen	§. 16.
15	19	Zahkensystem	Zahlensystem
18	14	Dödekaden	Dodekaden
19	24	2 Trillionen	2 tausend Trillionen
—	25	2200 Millionen	200 Millionen
21	15	bestimmte	bestimmten
—	19	Cöfficienten	Coefficienten
24	14	b c	b ; c
25	5	— c a	c — a
37	25	Wenn der	Wenn in Zahlen der
41	20	§. 44.	§. 43.
43	20	+ 32	3 + ; 2
—	21	6 × 6	6 + 6
56	13	= a	= + a
—	14	= a	= — a
58	4	— 5 c	+ 5 c
59	18	muß die Zahl 2	wegbleiben
62	4	A B	a B
94	9 u. 11	$(a\,b^{m})$	$(a\,b)^{m}$
—	14	(3×4^{2})	$(3 \times 4)^{2}$
—	14	(2.3^{3})	$(2.3)^{3}$
—	22	$(\sqrt[m]{a}\ \sqrt[m]{b}\ )$	$(\sqrt[m]{a}\ \sqrt[m]{b})$
95	7 u. 9	$\left(\frac{a}{b}^{m}\right)$	$\left(\frac{a}{b}\right)^{m}$

Seite	Zeile	Statt	lies
95	16	$\left(\frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}}\right)$	$\left(\frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}}\right)$
96	13 u. 19	$\frac{n^2}{x^2}$	$\frac{u^2}{x^2}$
98	7 u. 12	$\left(-a^{2n}\right)$	$\left(-a\right)^{2n}$
	15	$\left(-a^{2n+1}\right)$	$\left(-a\right)^{2n+1}$
	18	(-2^3)	$(-2)^3$
99	13	$5^2 a$	$5a^2$
	15	$3^3 a$	$3a^3$
102	7	$a^1 : a^2 = a^3$	$a^3 : a^2 = a^1$
	16 u. 18	$\frac{1}{x^n}$	$\frac{1}{x^n}$
104	2	$3+2$	3.2
		$a^{\frac{a}{m}}$	$a^{\frac{a}{m}}$
107	5 u. 12	2^2	2^m
108	1	$\frac{ac^2}{b^4}$	$-\frac{ac^3}{b^4}$
114	18	$+39$	$+30$
	21	$-\sqrt{1200}$	$-\sqrt{1280}$
116	2	$\sqrt[nn]{a}$	$\sqrt[mn]{a}$
117	5	zuerst	muß wegbleiben
130	22	$+102n$	10^{2n}
131	1	300	3
	22	177..	277...

Seite

Seite	Zeile	Statt	lies
136	7	$-136x^3$	$-36x^3$
144	14	K. 3	Nr. 3
155	10	$1{,}2n^3$	$1.2n^2$
157	3	$1.2n2$	$1.2n^2$
—	4	$\frac{m^2-e^2}{n^2}$	$\frac{m^2}{n^2}e^2$
—	13	$\left(\frac{n}{}\right)$ +	+
158	8	$(1+p)n$	$(1+p)^n$
160	1	$(1+e)^{\frac{m}{n}} \times (1+e)^{\frac{m}{n}}$	$(1+e)^{\frac{m}{n}} \times (1+e)^{\frac{m}{n}}$
168	10	β, ε	$\beta\varepsilon$ —
171	4	+	×
172	8	$\frac{1}{}$ m +)	$m+1$ —
—	12	n x m —)	$m-1$
176	15	$\frac{m}{n}+2$	m n
177	23	$\frac{s}{m}$ 7ten	2ten
183	15	§. 249.	§. 149.
184	7	§. 248.	§. 148.
187	16 u. 21	$x=\frac{a-b}{2}$	$x=\frac{a+b}{2}$
189	4	y, c	y, z
—	19	$y=a$	$y=c$ —
—	26	Nach $5y=6b-2a-z$ soll stehen:	$y=\frac{6b-2a-z}{5}$
190	7	$x=3b-3+$	$x=3b-3\times 1$
192	1	einfache Größe	einfache unbekannte Größe

Seite

Seite	Zeile	Statt	lies
344	18	log. compl. dec.	compl. dec. log.
		so auch bey folgenden.	
353	1	II. Abschn.	III. Abschn.
358	7	10000	1000
360	18	$\left(\frac{q+p}{p}\right)b$	$\left(\frac{q+p}{q}\right)b$
361	4	$\left(\frac{q+q}{q}\right)^2 b$	$\left(\frac{q+p}{q}\right)^2 b$
—	13	$-pq$	$-bq$
—	15	$-bp$	$-bq$
370	5	bp	bq
373	15	lassen	kann man
390	17	dxy	xdy
398	18	§. 312.	§. 312. a
399	6	§. 313.	§. 312. b.
400	5	2xdydx	2xdydz
—	6	$x^v d^2 x$	$xyd^2 z$
—	23	§. 314.	§. 313.
407	8	$y+v+(x+u)^m \times (a+x+u)^m$	$y+v$
		$=(x+u)^m \times (a+x+u)^n$	
408	6	$x\,in+u$	$x\,in\,x+u$
410	11	d^2x	dx^2
412	6	d^2u	d^2y
422	20	$=$log. nat.	$+$log. nat.
423	23	$-\frac{a^3}{2x^2}$	$=-\frac{a^3}{2x^2}$
429	4	$(a+bx^2)^{\frac{4}{5}}\int$	$(a+bx^2)^{\frac{4}{5}}=\int$
430	1	$(a+bx^8)$	$(a+bx^3)$

Seite	Zeile	Statt	lies
430	11	$)^{-\frac{2}{3}}$	$)^{-\frac{2}{3}}$
431	3	$\frac{1+0}{1}$	$\frac{1+0}{2}$
435	9	$dx = \frac{1}{2}dx$	$dx = \frac{1}{2}dz$
437	16	$\sqrt{(a^2 \pm ax)}$	$\sqrt{(x^2 \pm ax)}$
438	2	$x = x - \frac{1}{2}a$	$x = z - \frac{1}{2}a$
442	1	$\int \frac{-ax^2 dx}{ax^{-1} \pm 1}$	$\int \frac{-ax^{-2}dx}{ax^{-1} \pm 1}$
—	7	$\frac{a}{b}$	$\frac{b}{a}$
—	15	hx^m	bx^m
443	11 u. 15	$(x^2 + c^2)$	$(x^2 + c^2)^{-\frac{1}{2}}$
445	11	346. II.	§. 346. II.
447	8	$b^\circ x dx$	$bx^\circ dx$
448	7	log. nat. $(\pm\sqrt{}$	log. nat. $(x \pm\sqrt{}$
In der I. Tab. zu §. 136. 4te Zeile		$\pm A\}^{m-1}_{a\ \ b}$ $\pm 1\}$	$\pm A\}^{m}_{a\ b}$ $\pm 1\}$

In der VII. Tabelle zu §. 316. In der 3ten Reihe dritten Glied statt u lies u^2

Und in der letzten Reihe letzten Gliede statt $\frac{u^2}{1.2.3.}$ lies $\frac{u^3}{1.2.3.}$

In der VIII. Tabelle Zeile 13 statt $d(k^{k+1}$ lies $d(x^{k+1}$

In der IX. Tabelle Zeile 11 statt $g(g-m)(g+2m)$ lies $g(g+m)(g+2m)$

Seite	Zeile	Statt	lies
194	3	$x = \frac{-a-2d}{2n}$	$x = -\frac{a-3d}{2n}$
—	20	$x = \frac{3}{2} \pm \sqrt{5}$	$x = \frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{5}$
198	12	c	o
—	16	$px^3 qx^2$	$px^3 + qx^2$
—	19	$1 + n \quad n^2$ Bx	Bx^{n-2}
200	6	$+ o$	$= o$
206	12	Gleiche	Gleichung
215	1	muß heißen	mit dieser
219	17	b	h
220	15	$\sqrt{p}\sqrt{q}$	$\sqrt{p} - \sqrt{q}$
—	16	$\sqrt{r} - \sqrt{p}$	$\sqrt{r}; - \sqrt{p}$
224	12	32^2	$3n^2$
229	26	gesetzter	fortgesetzter
230	7	ist.	muß wegbleiben

232 ist die Seitenzahl 171 in 232 umzuändern.

—	7	$\frac{1}{(1+x)^4}$	$\frac{1}{a-x}$
233	17	$\frac{ax}{(1+x)^4}$	$-aD$
234	15	$\frac{1}{B+Ax^m}$	$A+Bx^m$
235	11	$\sqrt{(1+x)}$	$\sqrt{(a+x)}$
236	9	$\frac{1}{2.1.1.6}$	$\frac{1.3}{2.4.6.a^{\frac{6}{2}}}$
—	10	$\frac{1.3}{2.4.6.8.a^{\frac{5}{2}}}+$	$\frac{1.6}{2.4.6.8\,a^{\frac{6}{2}}}+$
—	11	$\frac{30}{2.4.8.a^{\frac{6}{2}}}$	$-\frac{1.3.0}{2.4.6.8\,a^{\frac{6}{2}}}$
—	14	$\frac{x}{2.4.}^{\frac{3}{2}}$	$\frac{x^2}{2.4.a^{\frac{3}{2}}}$

Seite	Zeile	Statt	lies
238	15 u. 20	$+B$	$+B^3$
—	17 u. 22	$3A^3D$	$3A^2D$
—	21	3^2AC	$3A^2C$
239	16	AB	aB
248	Nach der 4ten Zeile soll stehen §. 200.		
255	6	$n+1$	$n-1$
257	15	$u=+$	$u=a+$
263	12	$b<mb$	$b>mb$
—	15	$b>mb$	$b<mb$
265	14	3	2
266	21	$\frac{36}{5}$	$\frac{36}{3}$
280	26	$\frac{m^{n-1}}{1-m}$	$\frac{m^n}{1-m}$
281	17	II. Zusatz	III. Zusatz
285	19	$s=\frac{y}{x-1}$	$s=\frac{y}{x-y}$
303	5	$D\frac{x}{(1+x)^4}$	$D\frac{x^4}{(1+x)^4}$
305	18	$\frac{1}{3(2p^2-1)^2}$	$\frac{1}{3(2p^2-1)^3}$
309	27	$\frac{1}{2(2^2-1)^3}$	$\frac{1}{3(2.2^2-1)^3}$
310	16	$=\frac{1}{5.17^5}$	$+\frac{1}{5.17^5}$
314	1	VI. Ab.	IV. Abschn.
319	12	nehme	nehme man
320	10	A—B	B—A
336	10	Nr. 2.	Nr. 1.
344	10	202/120	102/120

Schinne

BSB Bayerische StaatsBibliothek

MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Magold, Maurus,

Lehrbuch der Arithmetik zum Gebrauche öffentlicher Vorlesungen auf der churfürstl. baierischen Landes-Universität in Landshut : mit 9 Tabellen

Landshut 1802

Math.u. 116-1
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10594107-9